

FÍSICA MATEMÁTICA I

Espacios de Hilbert y Operadores Lineales



María Cruz Boscá
Dpto. Física Atómica y Nuclear
Universidad de Granada

¿Para qué?

- **Principios del s. XX:**

-diversos fenómenos (cuerpo negro, espectroscopía, difracción de partículas, etc.) evidenciaron la insuficiencia de la física clásica.

La cuantización o discretización

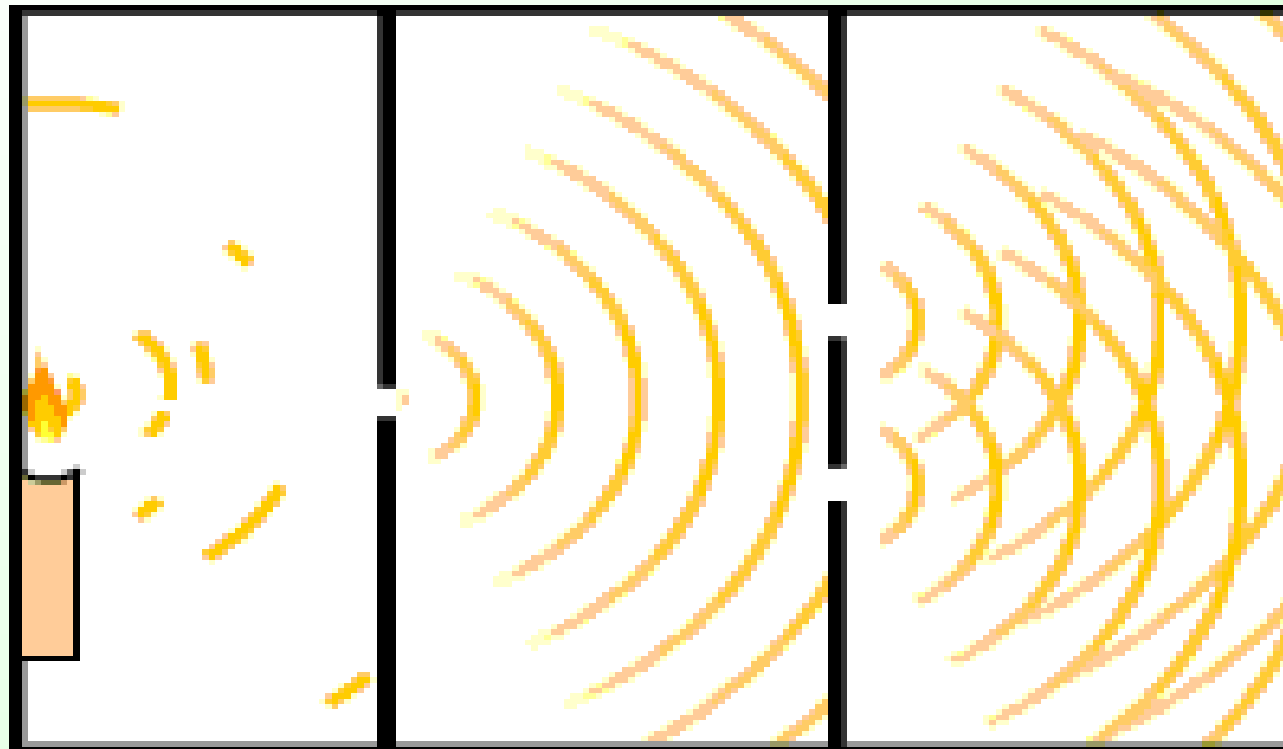
- Es un hecho experimentalmente comprobado que determinadas magnitudes físicas, en determinados sistemas, sólo toman un **conjunto discreto o no continuo de valores**:
 - la energía de los sistemas atómicos.
 - los momentos angulares.
 - la frecuencia de la luz emitida o absorbida por los átomos.
 - ...

Una nueva física

- Las teorías clásicas, en las que las variables dinámicas toman valores continuos, se mostraron incapaces de dar cuenta de estos fenómenos experimentales.
- “Quantum mechanics arose, exactly out of the attempt **to break with all ordinary kinematical and mechanical concepts**”
(**Heisenberg**, 1927)

Doble rendija

Young, 1803:

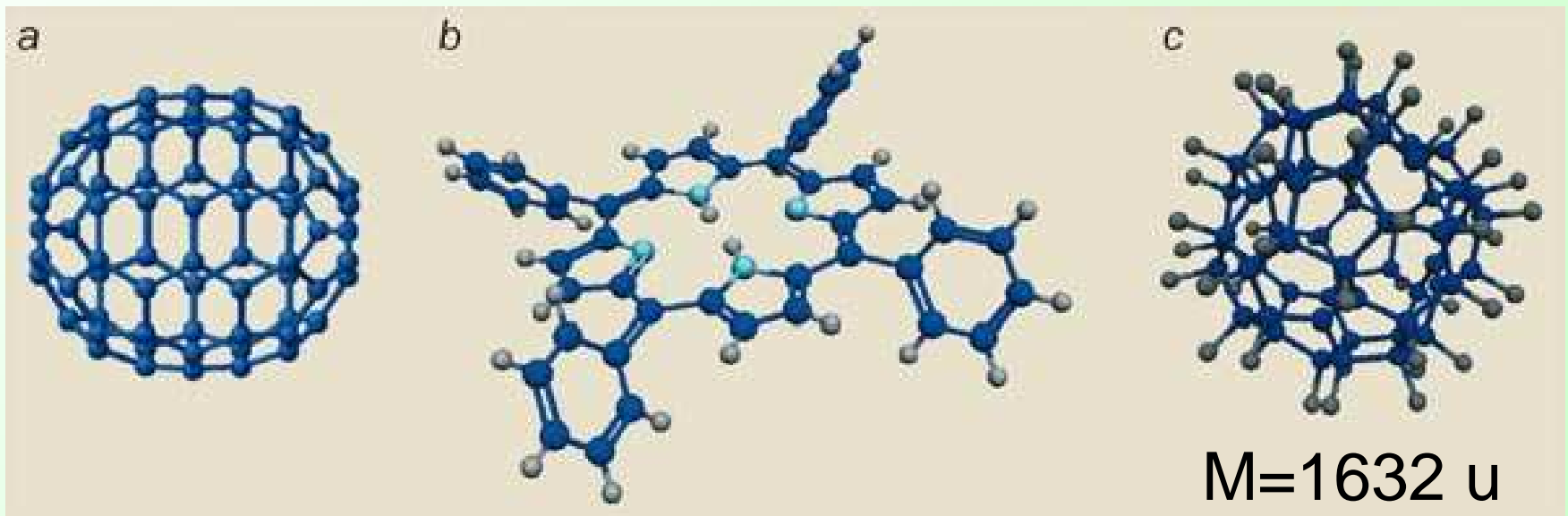


El experimento de la doble rendija

- **Un experimento paradigmático:**
 - 2002, *Physics World*: uno de los 10 más bellos experimentos en Física.
(<http://physicsworld.com/cws/article/print/9745>)
 - Jönsson, Tübingen, 1961 (electrones).
 - Merli, Missiroli and Pozzi, Bologna, 1974; Tonomura, Hitachi, 1989 (electrones de uno en uno).
 - Zeilinger, 1999 (fullerenos).

La doble rendija con objetos grandes

- Se han llevado a cabo interferencias cuánticas con moléculas de más de 100 átomos:



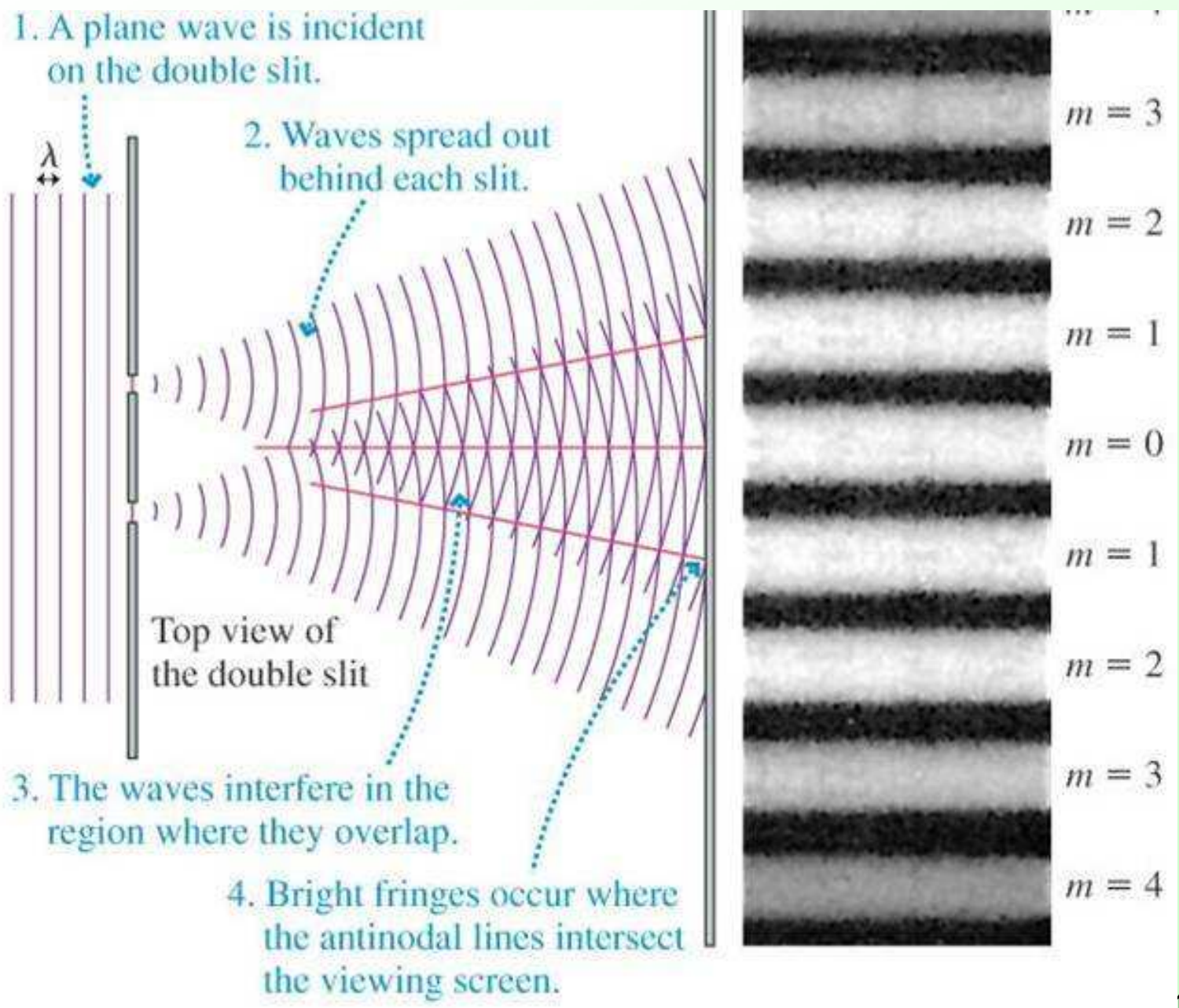
Un experimento crucial

- Experimento de la doble rendija:

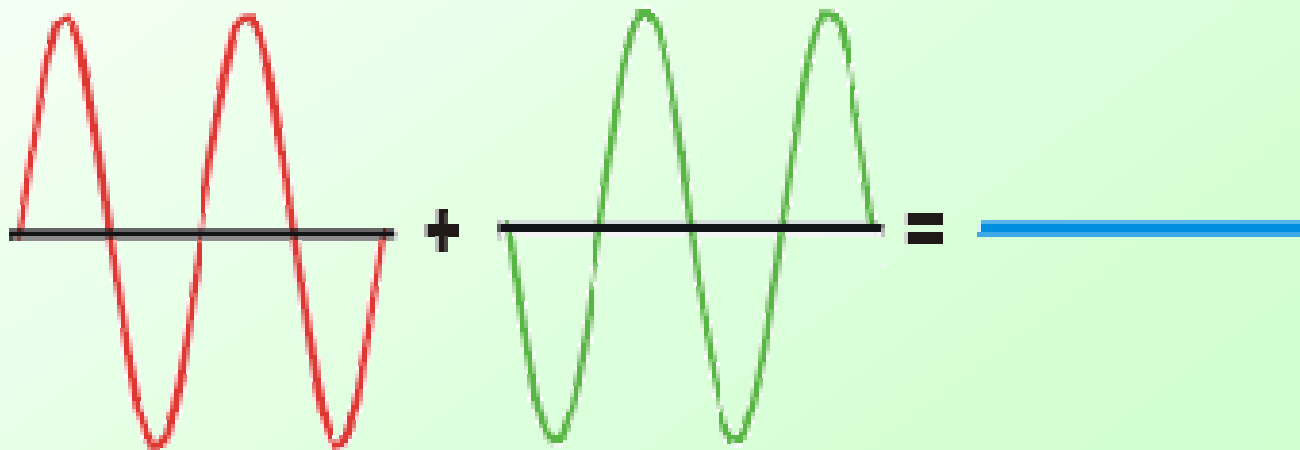
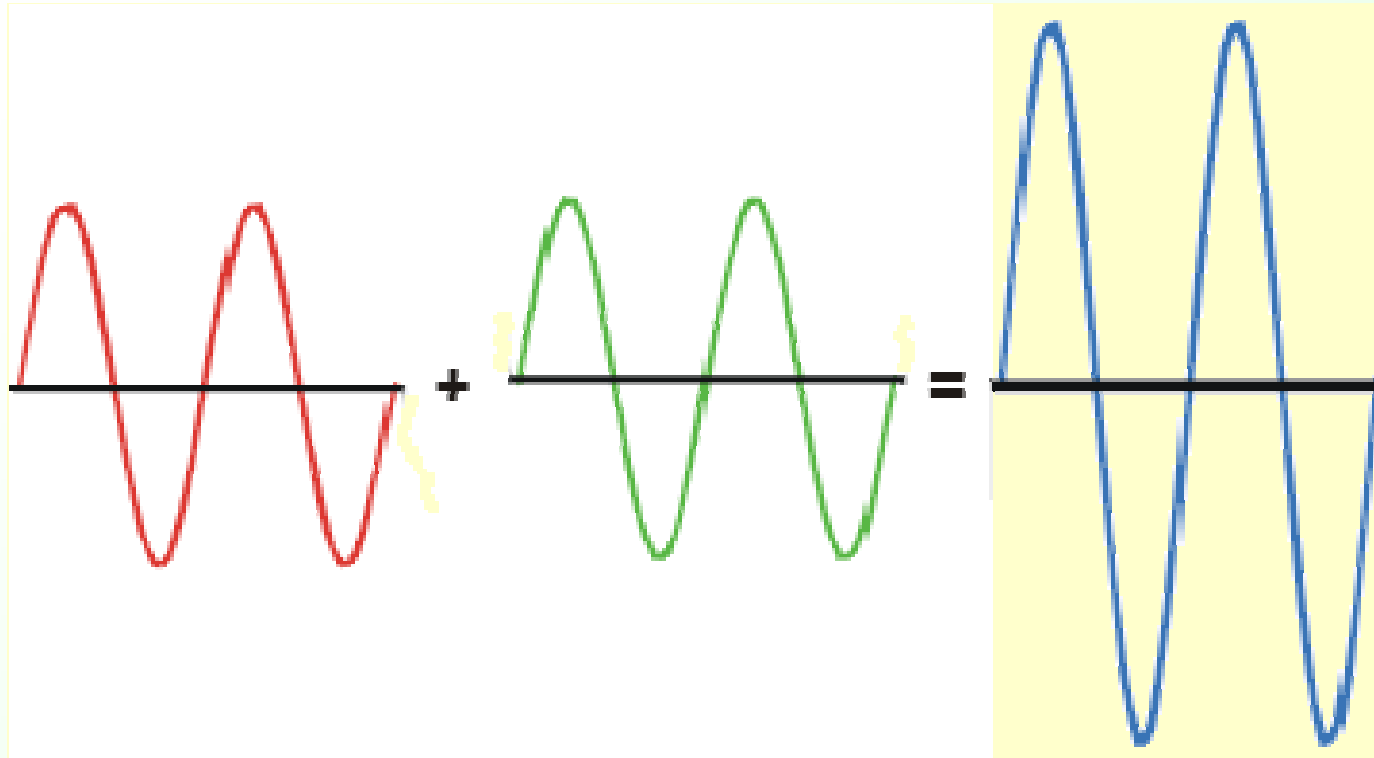
(<http://physicsworld.com/cws/article/print/9745>)

:

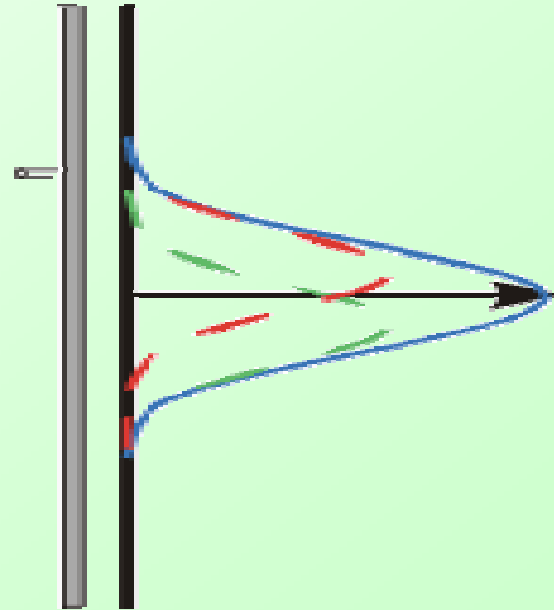
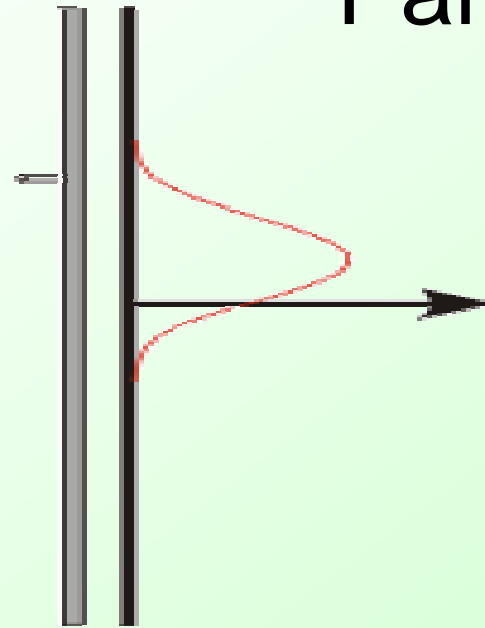
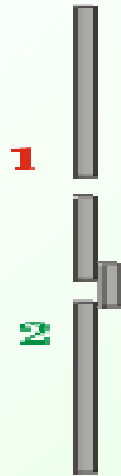
(“uno de los más bellos experimentos...**realizados**”)



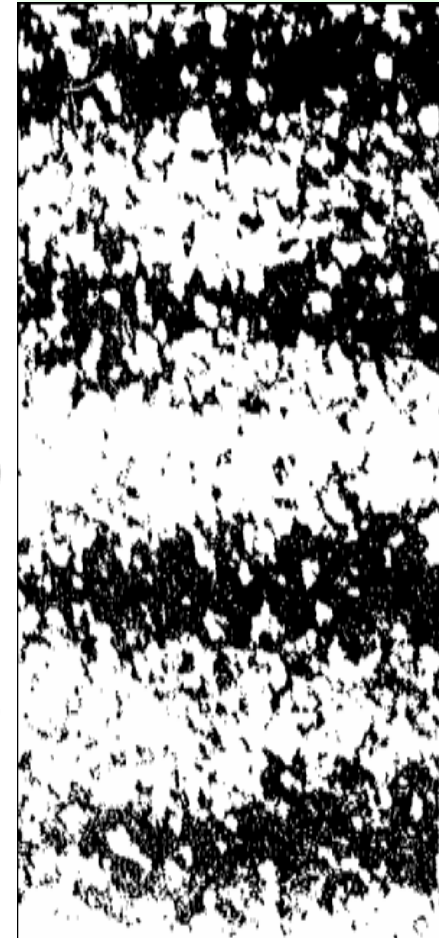
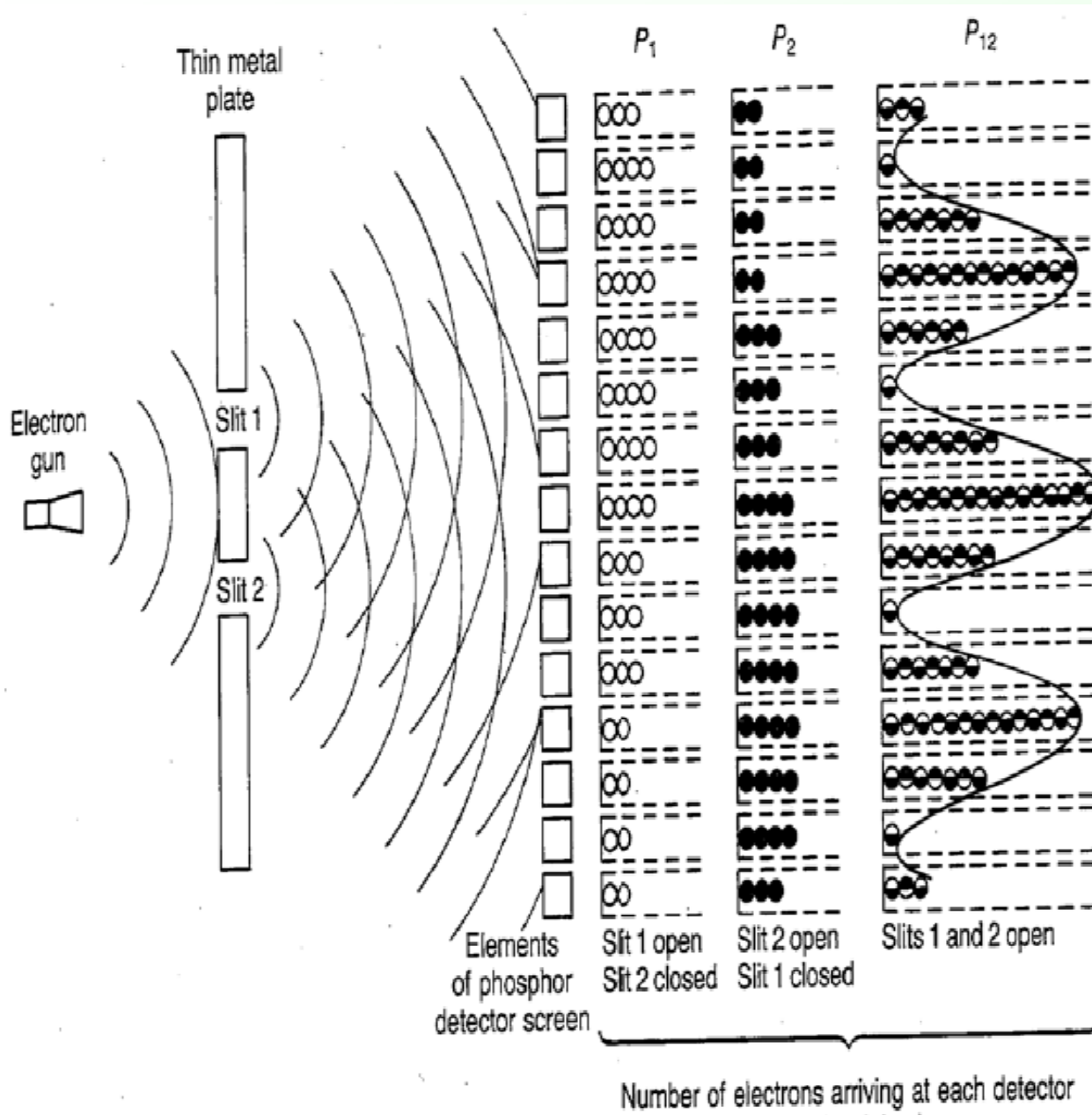
Ondas



Partículas

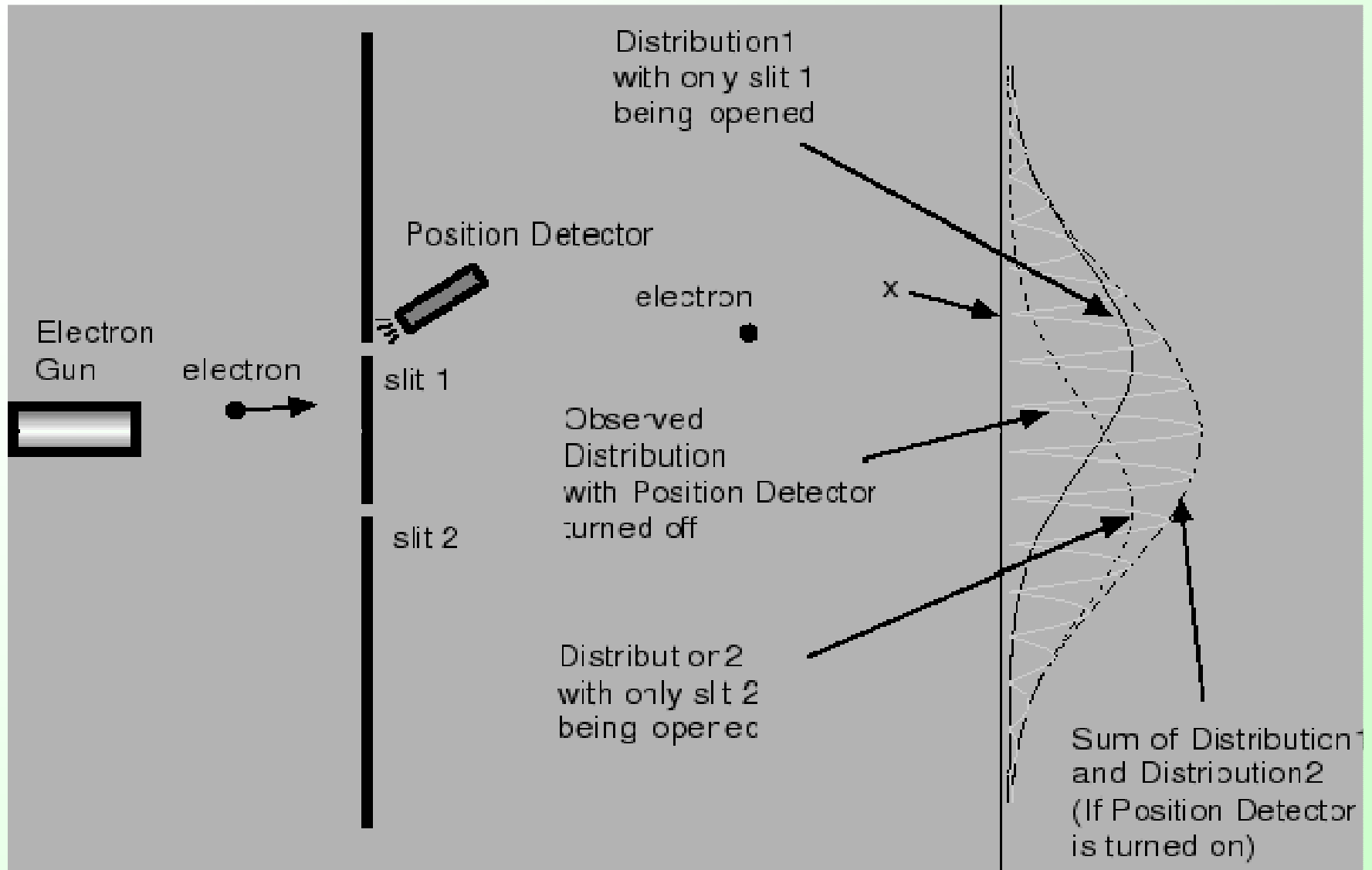


Electrones sin detector: ondas



interferencias

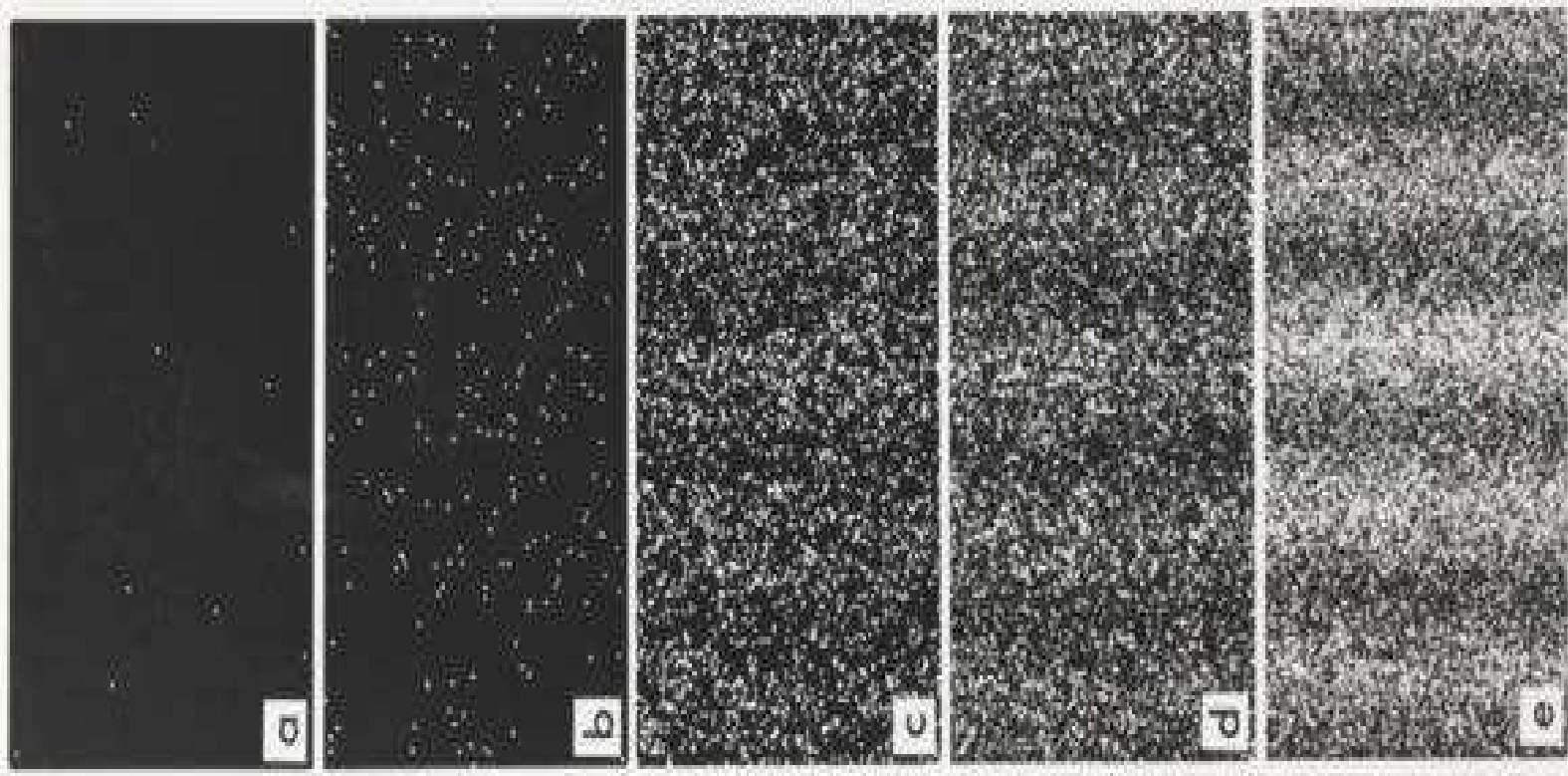
Con detector de rendija: partículas



Y ahora, de uno en uno...

- También podemos hacer que los electrones atraviesen el dispositivo **de uno en uno**.
(→ [simulación Harrison](#))
- **El resultado final no cambia, con o sin detector:**
 - sin detector, el **patrón interferencial de franjas** se va obteniendo con la [acumulación progresiva de registros](#).

- Sin detector de rendija atravesada (1974,1989):



¿difícil de entender?

- “Un *misterio* totalmente imposible de explicar en términos clásicos”
(Feynmann, 1965)

Un fenómeno cuántico

 **Requiere formalismo cuántico**

Un formalismo matemático

¿Para qué?

- <http://www.ece.gatech.edu/research/ccss/education/Java/1998.Winter/Projects/pierce-woods/project/bin/projApp.htm>
- <http://es.youtube.com/watch?v=elQYG5brROY>
- **La probabilidad** de detectar **partículas** en un punto cuando ambas rendijas están abiertas **no es la suma de las probabilidades** correspondientes a las situaciones con sólo una rendija abierta.
- -explicable con un **formalismo cuántico**

¿Para qué?

- **Mecánica Cuántica:** sumamos amplitudes de probabilidad Ψ (complejas):

$|\Psi|^2$ representa la probabilidad de un suceso (M. Born, 1926)

$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2 \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2$$

Las probabilidades cuánticas no se suman

¿Para qué?

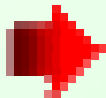
- Lectura *recomendada*:
- **R.F. Feynman**, “**Six easy pieces**”, Penguin, **cap. 6**, “**Quantum Behavior**”, pp. 115-138.

¿Para qué?

- ¿Cómo representamos un **sistema físico** :

$$|\Psi\rangle :$$

- “Un vector de un espacio de Hilbert complejo y separable”:

 un “*Ket*”, $|\Psi\rangle$

- → **Axioma 1 de la Mecánica Cuántica**

¿Para qué?

- ¿Cómo representamos las **magnitudes físicas**? (posición, momento, etc.)
- -"Cada **observable** de un sistema físico se representa en M.C. mediante un **operador lineal autoadjunto** que actúa en el **espacio de Hilbert** del sistema físico considerado"
- → **Axioma 2 de la Mecánica Cuántica**

¿Para qué?

- **Un espacio matemático:**

-donde unos estados se construyen a partir de otros por superposición:

- **Un espacio lineal**

-donde los operadores que representan magnitudes físicas poseen autofunciones ortogonales que representan estados cuánticos...

- **Operadores lineales autoadjuntos**

PROGRAMA

- 1. Espacios lineales (repaso)
- 2. Espacios normados y de Banach
- 3. Espacios euclídeos
- 4. Espacios de Hilbert
- 5. Espacios de funciones
- 6. Operadores
- 7. Teoría espectral
- 8. Distribuciones (seminario)

Análisis Funcional

- Matemáticas:

“el lenguaje de la ciencia”

- Naturaleza **relacional**:

sus objetos son símbolos abstractos

se agrupan en conjuntos

se relacionan

- estudio de **estructuras**:

- algebraicas (*composición*);

- analíticas:

- topológicas** (*entornos*), **medibles** (*extensión*).

Análisis Funcional

- Ejemplo: $\rightarrow \mathbf{R}$ (reales)
 - estructura algebraica**: *espacio lineal conmutativo, con división de primer orden...*
 - estructura topológica**: *espacio métrico completo, separable, local y simplemente conectado, localmente compacto... (“1-espacio euclídeo”)*
 - estructura con medida**: *espacio medible completo, totalmente σ -finito...*

Análisis Funcional

- Posibilidades variadas de **combinación** de los distintos tipos de estructuras:

-componer algebraicamente estructuras topológicas

→ *Topologías algebraicas*

-superponer estructura topológica y/o de medida a un sistema algebraico

→ *Álgebras topológicas*

Análisis Funcional

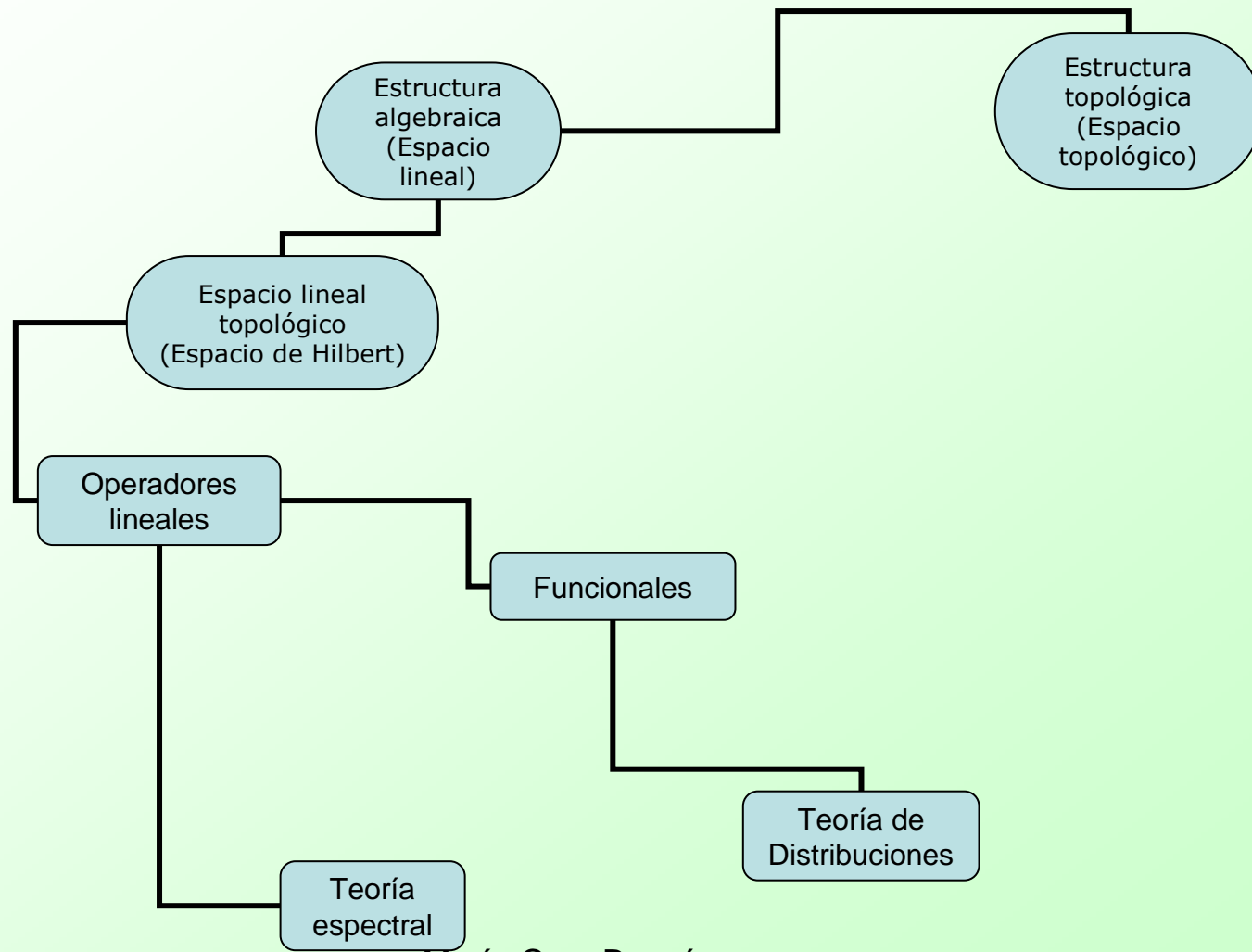
- → Superponer una estructura topológica a un sistema algebraico:

- → “Álgebra topológica” o

“Análisis Funcional”

→ Aplicaciones (*maps*) sobre espacios con estructuras algebraicas y analíticas combinadas: *Operadores, ...*

Análisis Funcional



ESTRUCTURAS E INTERRELACIONES

- [EsquemaFMI.mht](#)