



# FÍSICA MATEMÁTICA I

## Espacios de Hilbert y Operadores Lineales



María Cruz Boscá  
Dpto. Física Atómica y Nuclear  
Universidad de Granada

# ¿Para qué?

- **Principios del s. XX:**

-diversos fenómenos (cuerpo negro, espectroscopía, difracción de partículas, etc.) evidenciaron la insuficiencia de la física clásica.

# La cuantización o discretización

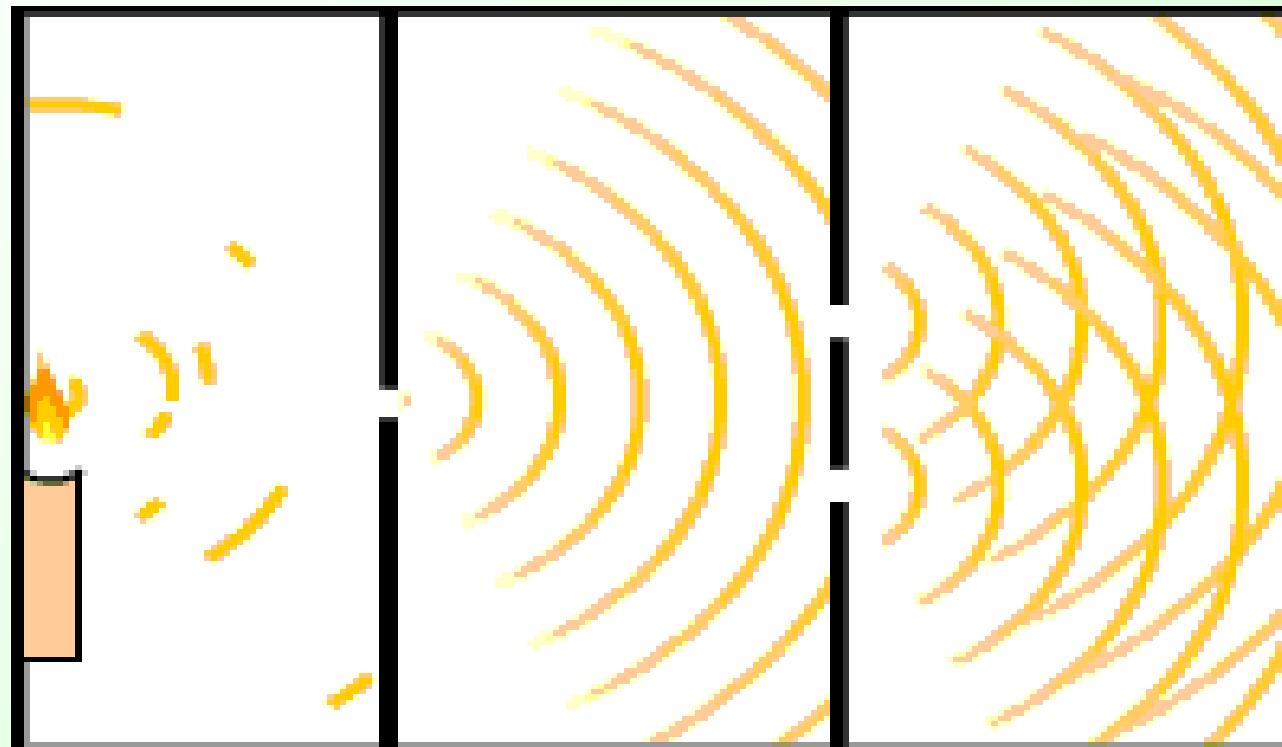
- Es un hecho experimentalmente comprobado que determinadas magnitudes físicas, en determinados sistemas, sólo toman un **conjunto discreto o no continuo de valores**:
  - la energía de los sistemas atómicos.
  - los momentos angulares.
  - la frecuencia de la luz emitida o absorbida por los átomos.
  - ...

# Una nueva física

- Las teorías clásicas, en las que las variables dinámicas toman valores continuos, se mostraron incapaces de dar cuenta de estos fenómenos experimentales.
- “Quantum mechanics arose, exactly out of the attempt **to break with all ordinary kinematical and mechanical concepts**”  
**(Heisenberg, 1927)**

# Doble rendija

# Young, 1803:

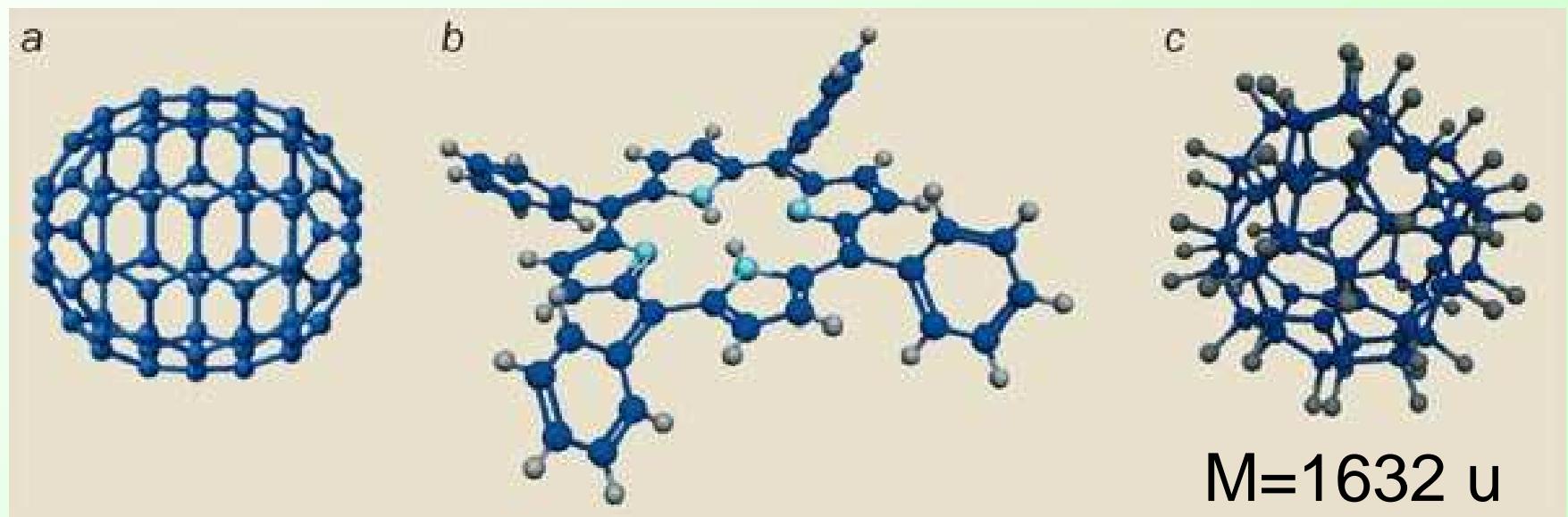


# El experimento de la doble rendija

- **Un experimento paradigmático:**
  - 2002, *Physics World*: uno de los 10 más bellos experimentos en Física.  
(<http://physicsworld.com/cws/article/print/9745>)
  - Jönsson, Tübingen, 1961 (electrones).
  - Merli, Missiroli and Pozzi, Bologna, 1974; Tonomura, Hitachi, 1989 (electrones de uno en uno).
  - Zeilinger, 1999 (fullerenos).

# La doble rendija con objetos grandes

- Se han llevado a cabo interferencias cuánticas con moléculas de más de 100 átomos:



# Un experimento crucial

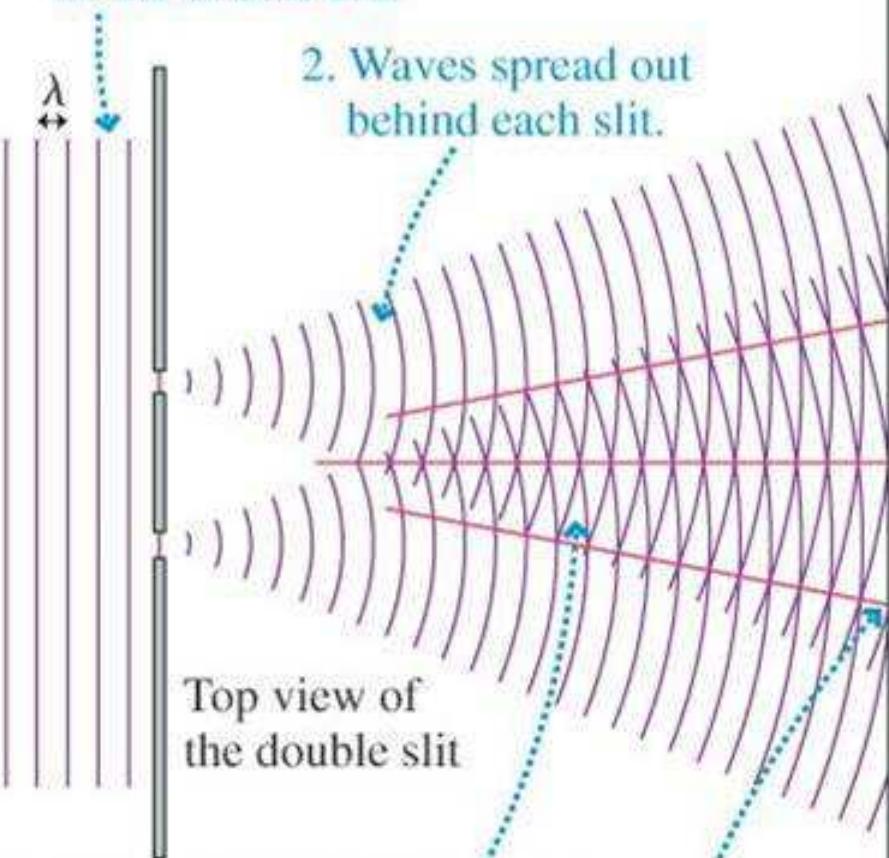
- Experimento de la doble rendija:

(<http://physicsworld.com/cws/article/print/9745>)

:

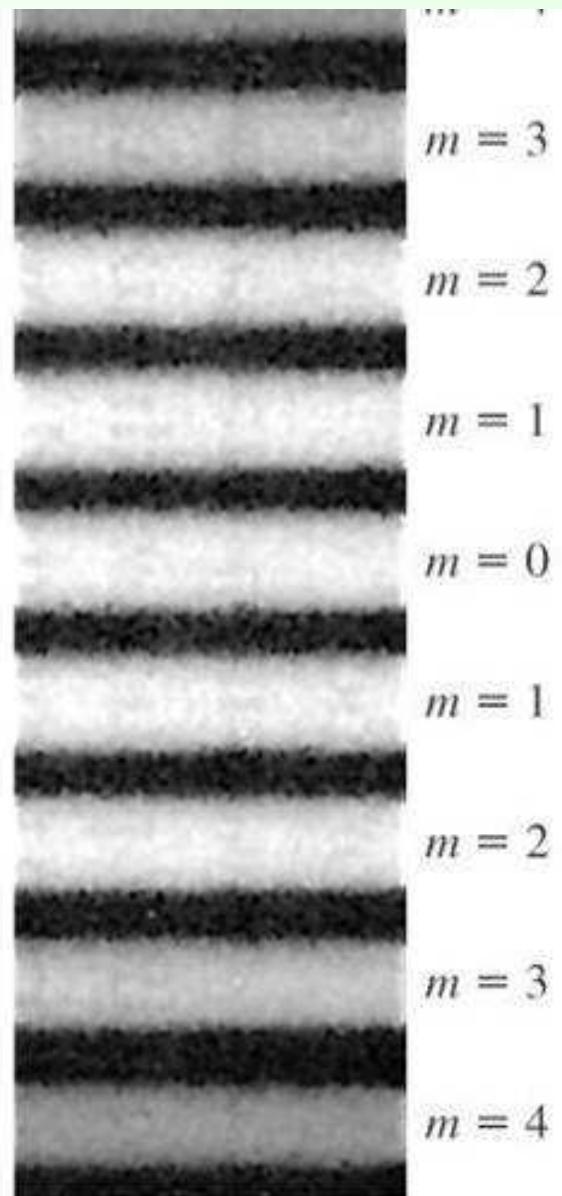
(“uno de los más bellos  
experimentos...**realizados**”)

1. A plane wave is incident on the double slit.

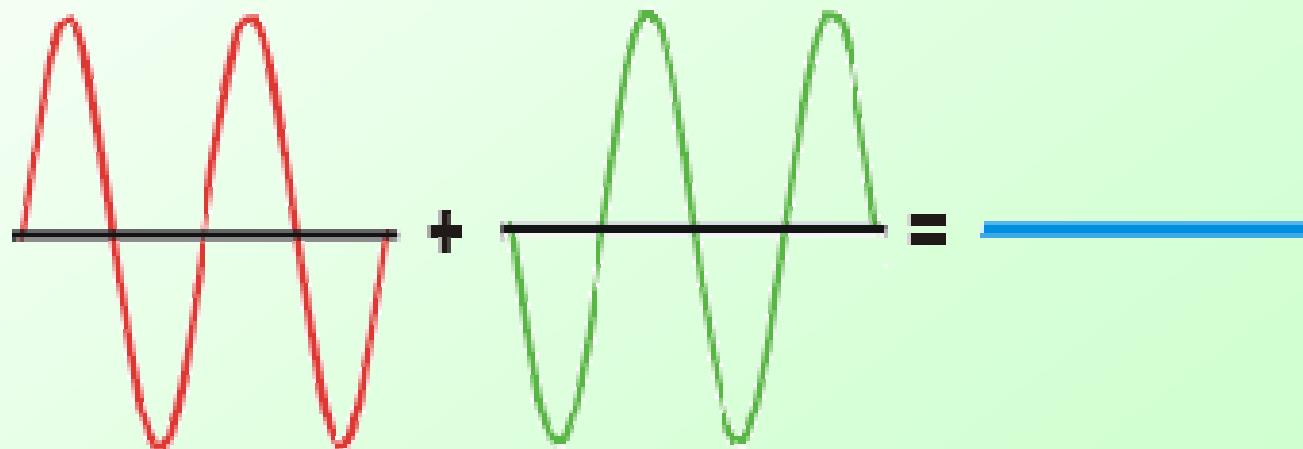
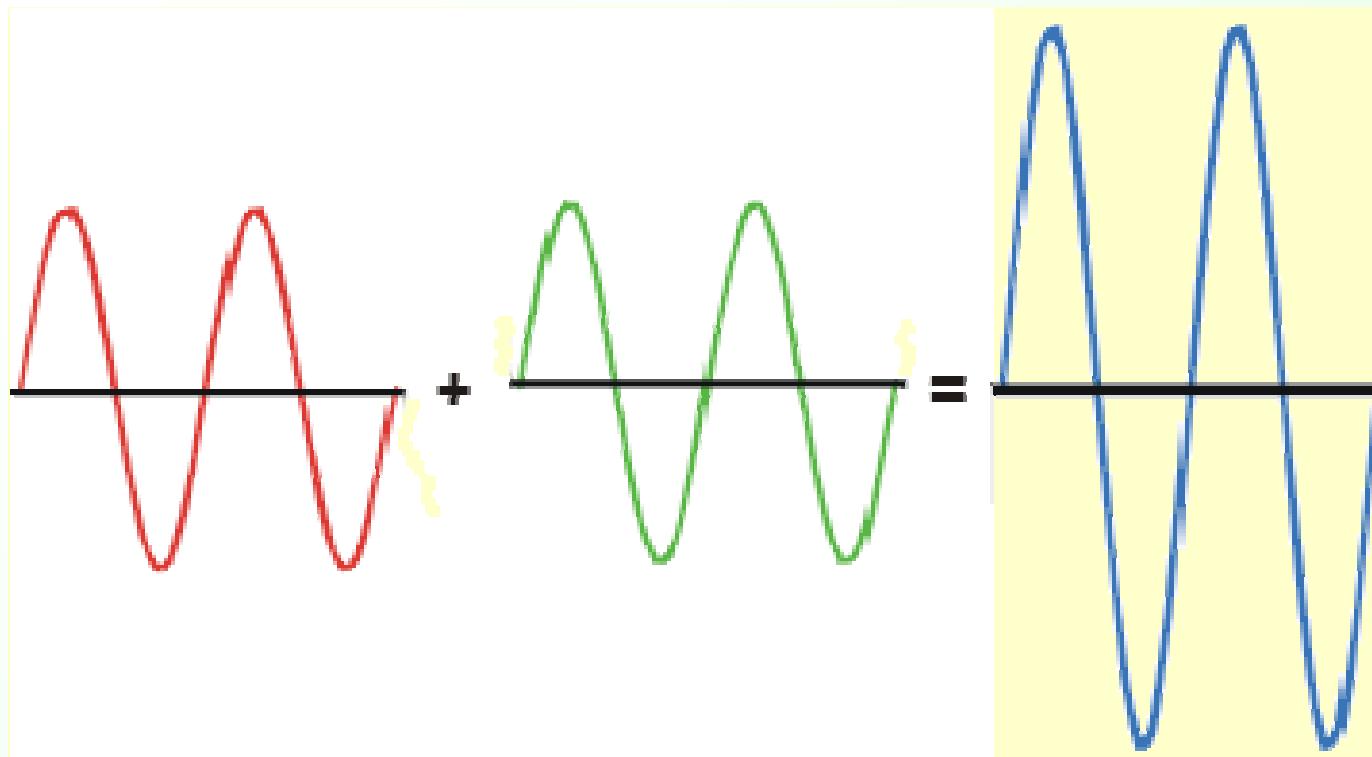


2. Waves spread out behind each slit.

3. The waves interfere in the region where they overlap.
4. Bright fringes occur where the antinodal lines intersect the viewing screen.

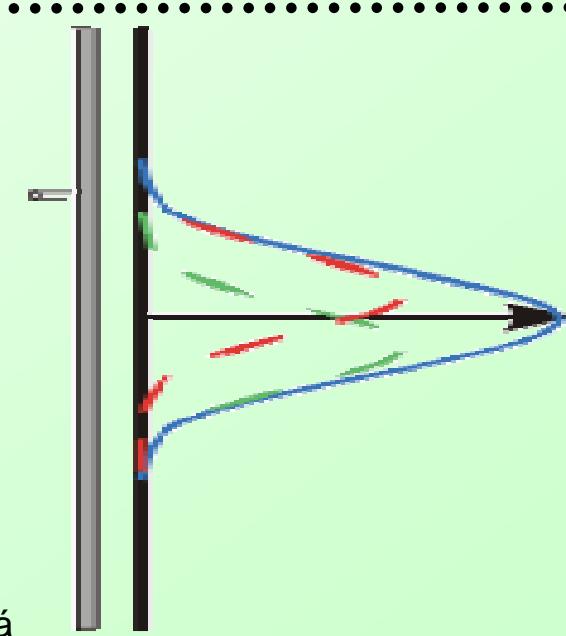
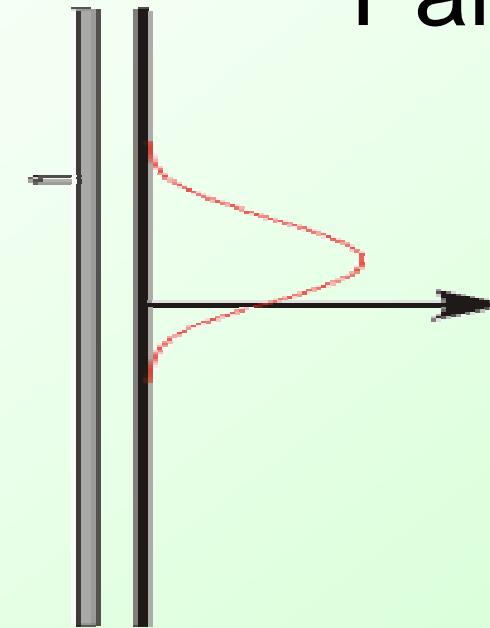
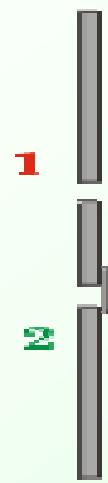


# Ondas



María Cruz Boscá

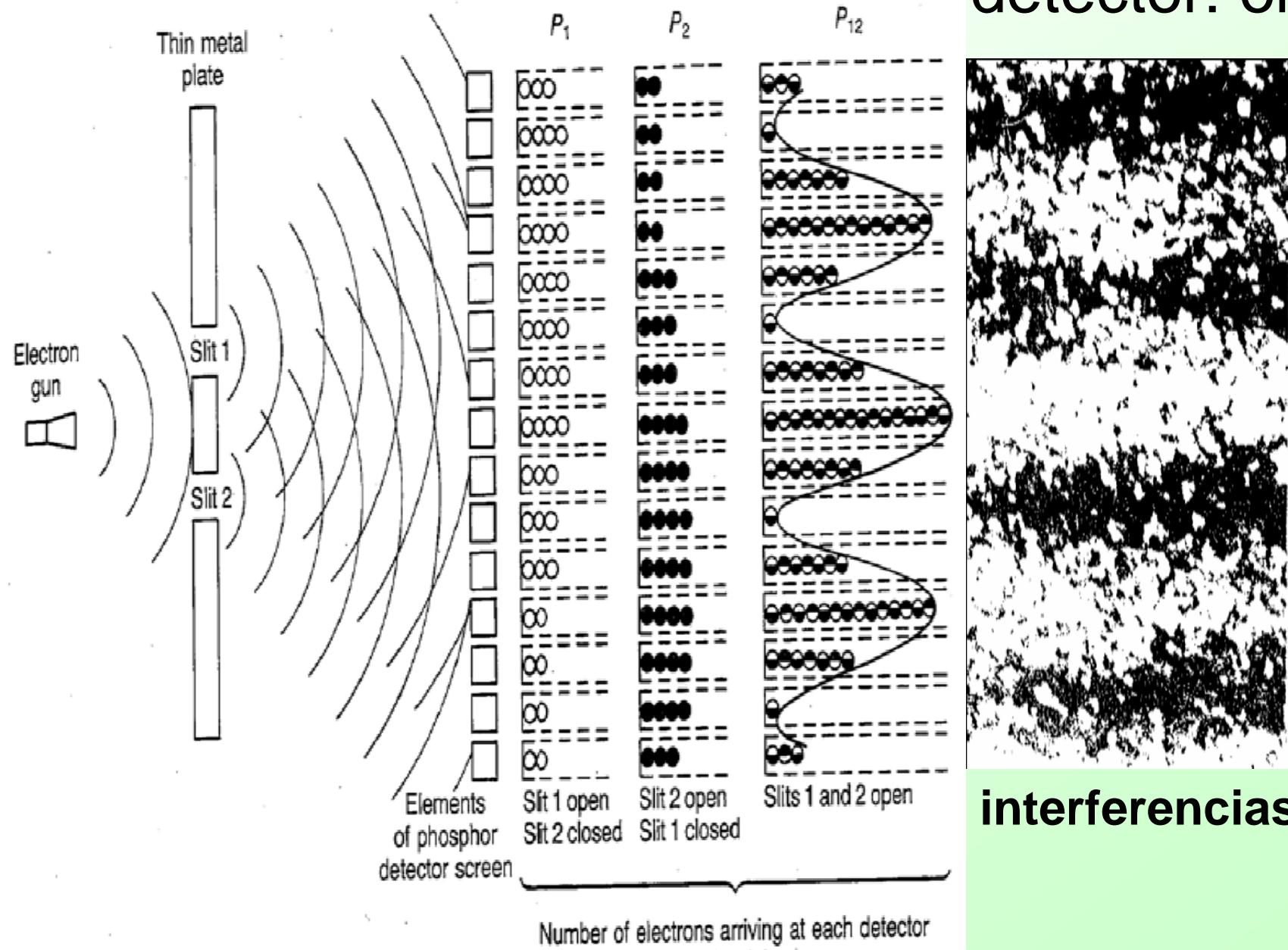
# Partículas



María Cruz Boscá

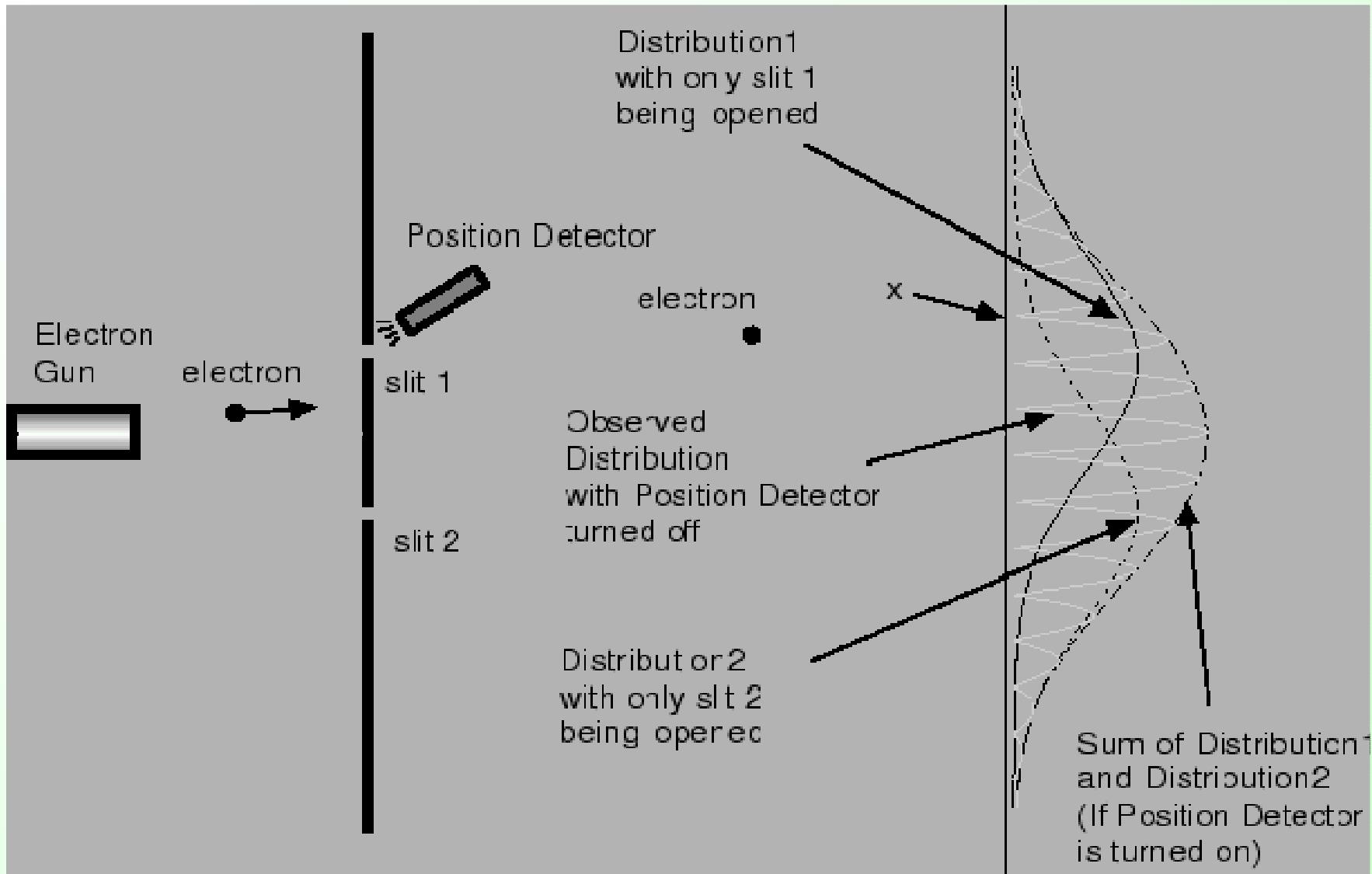
12

# Electrones sin detector: ondas



interferencias

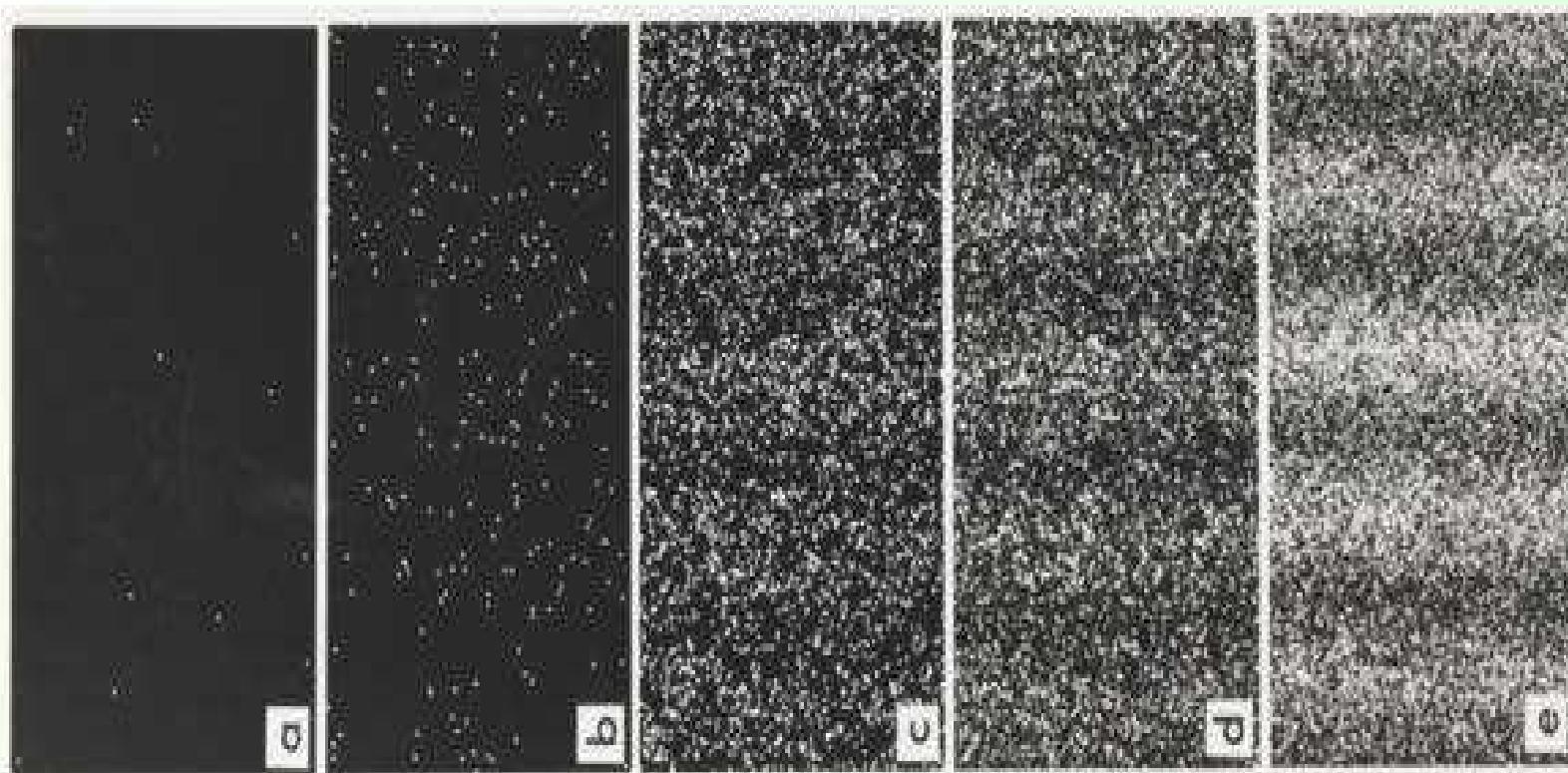
# Con detector de rendija: partículas



# Y ahora, de uno en uno...

- También podemos hacer que los electrones atraviesen el dispositivo **de uno en uno**.  
(→ simulación Harrison)
- **El resultado final no cambia, con o sin detector:**  
-sin detector, el **patrón interferencial de franjas** se va obteniendo con la acumulación progresiva de registros.

- Sin detector de rendija atravesada (1974,1989):



# ¿difícil de entender?

- “Un *misterio* totalmente imposible de explicar en términos clásicos”  
**(Feynmann, 1965)**

**Un fenómeno cuántico**



**Requiere formalismo cuántico**

**Un formalismo matemático**

# ¿Para qué?

- <http://www.ece.gatech.edu/research/ccss/education/Java/1998.Winter/Projects/pierce-woods/project/bin/projApp.htm>
- <http://es.youtube.com/watch?v=elQYG5brROY>
- La **probabilidad** de detectar **partículas** en un punto cuando ambas rendijas están abiertas **no es la suma de las probabilidades** correspondientes a las situaciones con sólo una rendija abierta.
- -explicable con un

**formalismo cuántico**

# ¿Para qué?

- **Mecánica Cuántica**: sumamos amplitudes de probabilidad  $\Psi$  (complejas):

$|\Psi|^2$  representa la probabilidad de un suceso (M. Born, 1926)

$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2 \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2$$

Las probabilidades cuánticas no se suman

# ¿Para qué?

- Lectura *recomendada*:
- **R.F. Feynman**, “**Six easy pieces**”, Penguin, **cap. 6**, “**Quantum Behavior**”, pp. 115-138.

# ¿Para qué?

- ¿Cómo representamos un **sistema físico** :

$|\Psi\rangle$  :

- “Un vector de un espacio de Hilbert complejo y separable”:



un “Ket”,

$|\Psi\rangle$

- → **Axioma 1 de la Mecánica Cuántica**

# ¿Para qué?

- ¿Cómo representamos las **magnitudes físicas**? (posición, momento, etc.)
- -"Cada **observable** de un sistema físico se representa en M.C. mediante un **operador lineal autoadjunto** que actúa en el **espacio de Hilbert** del sistema físico considerado"
- → **Axioma 2 de la Mecánica Cuántica**

# ¿Para qué?

- **Un espacio matemático:**
  - donde unos estados se construyen a partir de otros por superposición:
    - **Un espacio lineal**
  - donde los operadores que representan magnitudes físicas poseen autofunciones ortogonales que representan estados cuánticos...
    - **Operadores lineales autoadjuntos**

# PROGRAMA

- 1. Espacios lineales (repaso)
- 2. Espacios normados y de Banach
- 3. Espacios euclídeos
- 4. Espacios de Hilbert
- 5. Espacios de funciones
- 6. Operadores
- 7. Teoría espectral
- 8. Distribuciones (seminario)

# Análisis Funcional

- Matemáticas:

“el lenguaje de la ciencia”

-Naturaleza **relacional**:

*sus objetos son símbolos abstractos  
se agrupan en conjuntos  
se relacionan*

→ estudio de **estructuras**:

-algebraicas (*composición*);

-analíticas:

**topológicas** (*entornos*), **medibles** (*extensión*).

# Análisis Funcional

- Ejemplo: → **R** (reales)
  - estructura algebraica**: espacio lineal conmutativo, con división de primer orden...
  - estructura topológica**: espacio métrico completo, separable, local y simplemente conectado, localmente compacto... (“1-espacio euclídeo”)
  - estructura con medida**: espacio medible completo, totalmente  $\sigma$ -finito...

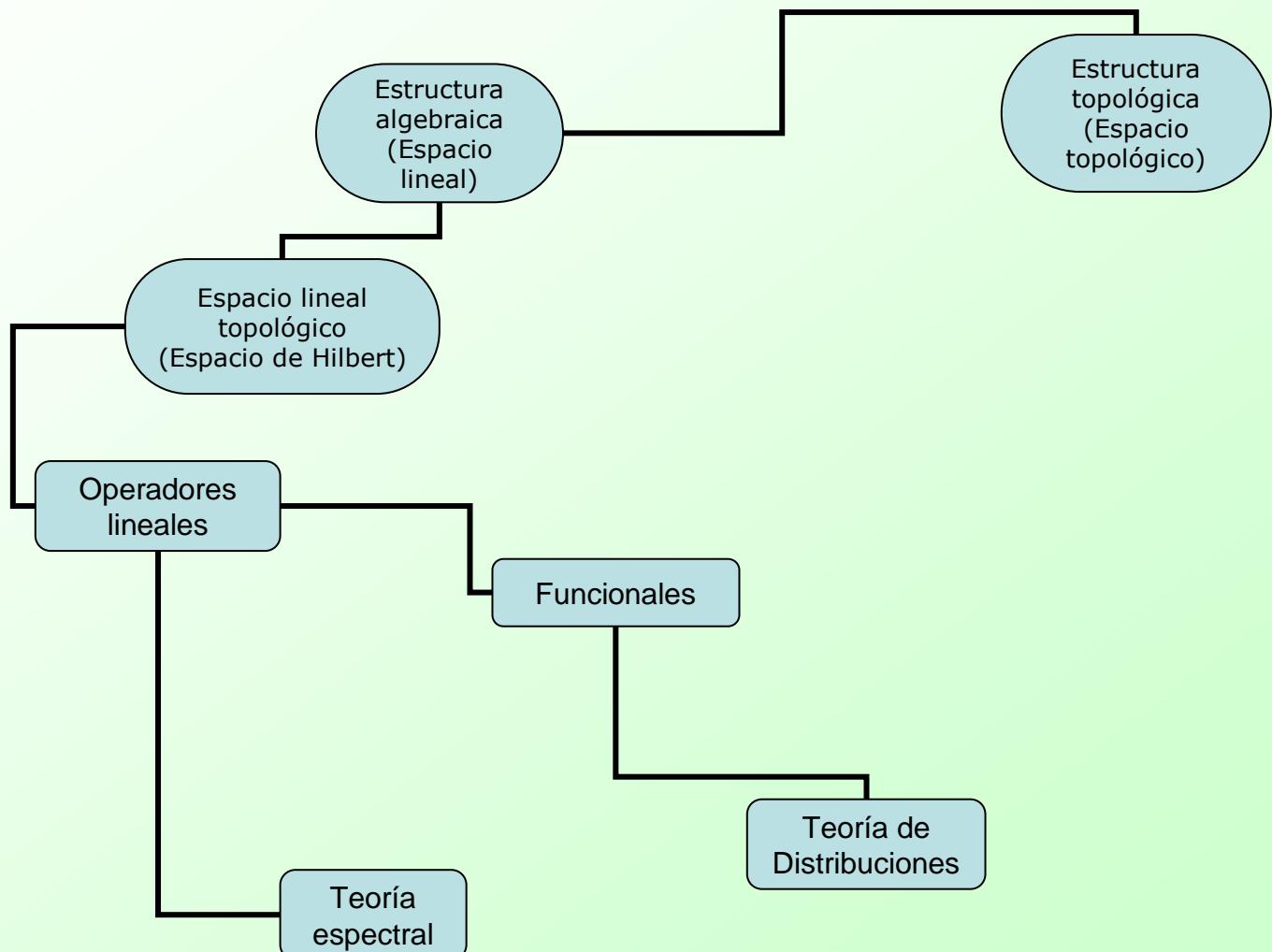
# Análisis Funcional

- Posibilidades variadas de **combinación** de los distintos tipos de estructuras:
  - componer algebraicamente estructuras topológicas
    - *Topologías algebraicas*
  - superponer estructuras topológica y/o de medida a un sistema algebraico
    - *Álgebras topológicas*

# Análisis Funcional

- → Superponer una estructura topológica a un sistema algebraico:
- → “Álgebra topológica” o  
“Análisis Funcional”
  - Aplicaciones (*maps*) sobre espacios con estructuras algebraicas y analíticas combinadas: *Operadores*, ...

# Análisis Funcional



# ESTRUCTURAS E INTERRELACIONES

- [EsquemaFMI.mht](#)