FÍSICA MATEMÁTICA I

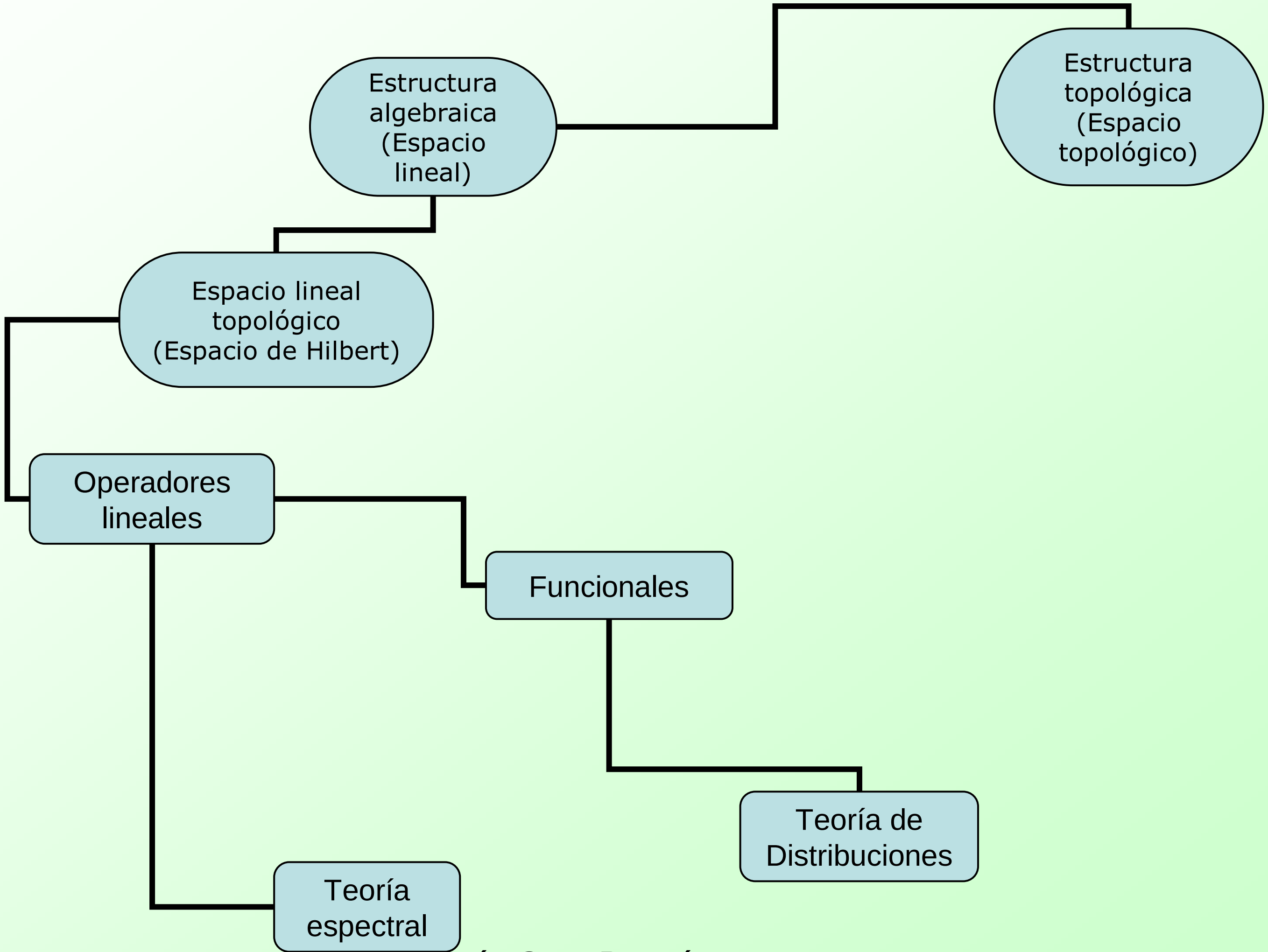
Espacios de Hilbert

y Operadores Lineales

PROGRAMA

- **1.** Espacios lineales (repaso)
- **2.** Espacios normados y de Banach
- **3.** Espacios euclídeos
- **4.** Espacios de Hilbert
- **5.** Espacios de funciones
- **6.** Operadores
- **7.** Teoría espectral
- **8.** Distribuciones (seminario)

Análisis Funcional



Análisis Funcional

- Matemáticas:

“el lenguaje de la ciencia”

-Naturaleza **relacional**:

sus objetos son símbolos abstractos

se agrupan en conjuntos

se relacionan

$\longrightarrow$ estudio de **estructuras:**

-algebraicas (*composición*)

-analíticas:

topológicas (*entornos*), **medibles** (*extensión*)

Análisis Funcional

- Ejemplo: $\rightarrow$ **R :**

-**estructura algebraica**: *espacio lineal conmutativo, con división de primer orden…*

-**estructura topológica**: *espacio métrico completo, separable, local y simplemente conectado, localmente compacto…(1-espacio euclídeo)*

-**estructura con medida**: *espacio medible completo, totalmente σ-finito…*

Análisis Funcional

- Posibilidades variadas de **combinación** de los distintos tipos de estructuras:

-componer algebraicamente estructuras topológicas

$\rightarrow$ ***Topologías algebraicas***

-superponer estructuras topológica y/o de medida a un sistema algebraico

$\rightarrow$ ***Álgebras topológicas***

Análisis Funcional

- → Superponer una estructura topológica a un sistema algebraico:
- → "Álgebra topológica" o

"Análisis Funcional"

→ Aplicaciones (*maps*) sobre espacios con estructuras algebraicas y analíticas combinadas: *Operadores*, …

Estructuras e interrelaciones

- EsquemaFMI.mht

Espacio topológico

- Sean un conjunto universal arbitrario $X \neq \emptyset$ y un subconjunto τ del conjunto potencia de X.
- $\rightarrow$ Definimos **una topología sobre X**.
- Abiertos, cerrados, entornos, bases, aplicaciones continuas, homeorfismos (aplic. biyectivas y bicontinuas),...
- $\rightarrow$ **Espacio topológico (X,τ).**

Espacio métrico

- Caso particular (el primero históricamente) de espacio topológico (X, τ): la topología procede de, o está inducida por, una **métrica d**$\rightarrow$ **espacio métrico (X,d)**
- Ejemplos:

$$(\mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}) \text{ con } d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)^2\right)^{1/2}$$

Espacio métrico

- ***Bola abierta*** *de centro x y radio* r > 0:

  B(x,r) = {y de X : d(y, x) < r}
- ***Conjunto abierto:*** todos sus puntos están contenidos en una bola abierta.

→ se dota a X de una **topología**: la natural,

inducida por **d**.

-Ejemplo: el conjunto de todos los suconjuntos de R que son unión de intervalos abiertos en la recta real (X=R).

Espacio métrico

- →**Sumario II**
- → Posponemos la mayor parte de las definiciones y propiedades al **tema 2.**
- → Pero es importante adentrarse en este sumario, comprenderlo…Para luego, en el tema 2, **tenerlo presente**.
- → **Repasar** los conceptos básicos de topología ya visto en Métodos Matemáticos de la Física II y III.

Espacio lineal topológico

- No todas las topologías son compatibles con la estructura de espacio lineal.
- Las que sí lo son, originan un **espacio lineal topológico, $(X,L,\tau)\equiv(L,\tau)$.**
- "Compatible": se satisfacen los **axiomas definitorios** de la estructura "espacio lineal topológico".

Espacio lineal métrico

- **No todas las métricas son compatibles** con la estructura de espacio lineal.
- Las que sí lo son, originan un **espacio lineal métrico, (X,L,d)≡(L,d).**
- "Compatible": se satisfacen los **axiomas definitorios** de la estructura "espacio lineal métrico" (**Ax. 1** y **2** en p. 6 del SumarioII).

Espacio lineal métrico

- Si la **topología** deriva de una **métrica** compatible con la estructura de **espacio lineal**, entonces está garantizado que la topología inducida por esa **d** es también compatible con la estructura de **espacio lineal**.
  - →**Todo espacio lineal métrico es espacio lineal topológico.**

Espacio lineal normado

- Definición de **norma ||.||** (tema2, p. 1).
- Una norma, definida sobre un espacio lineal L y con recorrido en R, define un

espacio normado:

$$(L,||.||) .$$

- Una norma induce una métrica:

$$d(x,y)=||x-y||,$$

para todo par de elementos x,y de L.

Espacio lineal normado

- →**Todo espacio normado es espacio lineal normado.**
- La métrica d inducida por una norma es **siempre compatible con la estructura de espacio lineal**:
- →**Todo espacio normado es espacio lineal métrico.**
- **Una norma, definida sobre un espacio lineal L, origina siempre un espacio lineal métrico**.