MÉTODOS MATEMÁTICOS

ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Profesora: Mª Cruz Boscá

1. ESPACIOS LINEALES

1.1. Espacio lineal L sobre un cuerpo (conmutativo) Λ

Un *espacio lineal* (o *vectorial*) L sobre un cuerpo conmutativo $(\Lambda,+,\cdot)$ es una terna $(L,+,\bullet)$ donde:

Ax. 1. L es un conjunto no vacío, $L\neq\varnothing$.

Ax. 2. $(+)$ es un ley de composición interna $L\times L\xrightarrow{+}L$.

Ax. 3. $(\bullet)$ es una ley de composición externa $\Lambda\times L\xrightarrow{\bullet}L$.

Ax. 4. $(L,+)$ es un grupo abeliano, esto es:

-Ax. 4.1. $x+(y+z)=(x+y)+z \quad \forall x,y,z\in L$ (propiedad asociativa).

-Ax. 4.2. $\exists!\ e\in L \ / \ e+x=x+e=x \quad \forall x\in L$ (elemento neutro).

-Ax. 4.3. $\forall x\in L \ \exists -x\in L \ / \ x+-x=-x+x=e \quad \forall x\in L$.
(elemento opuesto o simétrico).

-Ax. 4.4. $x+y=y+x \quad \forall x,y\in L$ (propiedad conmutativa).

Ax. 5. $\alpha\bullet(x+y)=\alpha\bullet x+\alpha\bullet y \quad \forall\alpha\in\Lambda \quad \forall x,y\in L$ (propiedad distributiva de $(\bullet)$ respecto de $(+)$).

Ax. 6. $\alpha\bullet(\beta\bullet x)=(\alpha\cdot\beta)\bullet x \quad \forall\alpha,\beta\in\Lambda \quad \forall x\in L$.

Ax. 7. $(\alpha+\beta)\bullet x=\alpha\bullet x+\beta\bullet x \quad \forall\alpha,\beta\in\Lambda \quad \forall x\in L$ (propiedad distributiva de la ley "suma" $(+)$, $\Lambda\times\Lambda\xrightarrow{+}\Lambda$, respecto de la ley $(\bullet)$).

Ax. 8. $\varepsilon_1\bullet x=x \quad \forall x\in L$ (ε_1 es el elemento neutro de la ley "del producto" $(\cdot)$ en Λ, $\Lambda\times\Lambda\xrightarrow{\cdot}\Lambda$).

Propiedades:

a) $\alpha\bullet e=e \quad \forall\alpha\in\Lambda$

b) $\varepsilon\bullet x=e \quad \forall x\in L$ (ε es elemento neutro de la ley $(+)$ en Λ)

c) $-x=-\varepsilon_1\bullet x \quad \forall x\in L$

d) $\alpha\bullet x=\alpha\bullet y,\ \alpha\neq\varepsilon \quad\Rightarrow\quad x=y$

e) $x+y=x+z \quad\Rightarrow\quad y=z$

f) $\alpha\bullet x=\beta\bullet x,\ x\neq e \quad\Rightarrow\quad \alpha=\beta$

g) $\alpha\bullet x=e \quad\Rightarrow\quad \alpha=\varepsilon \ \text{o} \ x=e$

Notación:

- $x \in L$ »» "vectores" »» letras latinas (en libros de texto $\vec{x}$ o $\boldsymbol{x}$).
- $\alpha \in \Lambda$ »» "escalares" »» letras griegas
- $\alpha \bullet x$ »» αx
- Λ »» $\mathbb{k}$ donde $\mathbb{k} \equiv \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} \equiv \mathbb{C}$
- e »» $\vec{0}$ (o **0**) ; ε »» 0 ; ε_1 »» 1

Operaciones con conjuntos

Sean $A \subset L$ y $B \subset L$ subconjuntos de L, entonces:

a) *Suma* de subconjuntos: $A+B=\{z \in L \ : \ z=x+y, \ \ x\in A, \ y \in B\} \subset L$

b) *Producto* de subconjunto por escalar: $\alpha A=\{z \in L \ : \ z=\alpha x, \ \ x \in A\} \subset L$

(*Nota*: $2A \neq A+A$)

c) *Producto* de Λ por un subconjunto:

$\Lambda A=\{z \in L \ : \ z=\alpha x, \ \ \alpha \in \Lambda, \ x \in A\} \subset L = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \alpha A$

d) $A-B=\{z \in L \ : \ z=x-y, \ \ x \in A, \ y \in B\} \subset L$

e) *Producto* de subconjuntos: $A \times B=\{(x,y) \ : \ x \in A, \ y \in B\} \subset L \times L$

f) *Complementario* de un subconjunto A respecto de otro B:

$B \setminus A=\{x \in L \ : \ \ x \in B, \ x \notin A\} \subset L$

g) *Complementario* de un subconjunto A respecto de L:

$A^C=L \setminus A=\{x \in L \ : \ \ x \notin A\} \subset L$

1.2. Subespacios lineales

Subespacio lineal $M < L$

Un subconjunto $M \subset L$ no vacío, $M \neq \varnothing$, es subespacio lineal de L *sii* posee estructura de espacio lineal.

- Notación: " M es subespacio de L" »» $M < L$

Un subconjunto $M \subset L$, $M \neq \varnothing$, es subespacio lineal de L, $M < L$,
$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \Lambda, \ \forall x, y \in M \ \ : \ \ \alpha x+\beta y \in M$.

Propiedades

a) $L < L$, $\{\vec{0}\} < L$, $\vec{0} \in M \ \ \forall M < L$.

b) $M_n < L,\ n \in I \ \Rightarrow\ \bigcap_{n\in I} M_n < L$, donde I representa un conjunto de índices.

(*Nota*: en general, $\bigcup_{n\in I} M_n \not< L$).

c) Sea $\{M_i\}_{i=1}^{n}$, $n\in \mathbb{N}$, un conjunto de subespacios lineales de $L \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i < L$.

d) Sea $M < L \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in M \quad \forall n\in \mathbb{N},\ \forall x_1,\ldots,x_n \in M$

(*Nota*: todas las sumas $\sum$ de este sumario son finitas).

▶ Envolvente lineal $[S]$

⌖ Dado un subconjunto $S \subset L$,se define su *envolvente lineal*, $[S]$, como el conjunto de todas las combinaciones lineales de sus elementos:

$$[S]=\left\{ z\in L \ :\ z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\ \forall n\in \mathbb{N},\ \forall \alpha_1,\ldots\alpha_n \in \Lambda,\ \forall x_1,\ldots x_n \in S \right\}.$$

- Denominación: S es el *conjunto generador* de $[S]$.

▶ Propiedades

a) $[S] < L$

b) $[S]$ es el menor subespacio lineal que contiene a S.

c) $[S] = \bigcap_{\gamma\in I} M_\gamma$, donde $\{M_\gamma\}_{\gamma\in I}$ representa el conjunto de los subespacios que contienen a S.

1.3. Suma directa de subespacios lineales

⌖ Sea $\{M_i\}_{i=1}^{n}$, $n\in \mathbb{N}$, un conjunto de subespacios lineales de L, $M_i < L,\ i=1,\ldots,n$.

L es *suma directa* de $\{M_i\}_{i=1}^{n}$, $L=M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, si

$\forall x\in L \ :\ \exists!\ x_1 \in M_1,\ldots,x_n \in M_n$ tal que $x=\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(Nota: el signo $!$ indica que la descomposición es única).

▶ Dados $M_1 < L$ y $M_2 < L$, entonces

$$L = M_1 \oplus M_2 \ \Leftrightarrow\ L = M_1 + M_2 \text{ y } M_1 \cap M_2 = \{\vec{0}\}.$$

▶ Dados $M_i < L,\ i = 1,\dots,n$, entonces

$$L = \oplus\sum_{i=1}^{n} M_i = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \ \Rightarrow\ L = \sum_{i=1}^{n} M_i \ \text{ y } \ M_i \cap M_j = \{\vec{0}\} \ \ \forall i \neq j \,.$$

▶ Dado $M_1 < L \ \Rightarrow\ \exists\, M_2 < L \ :\ L = M_1 \oplus M_2$ (al menos, existe siempre uno).

⌖ **Complemento lineal:** Dado $M < L$, se define un *complemento lineal* de M en L, o subespacio complemento de M en L, como un subespacio lineal $M' < L \ :\ \mathrm{L} = M \oplus M'$ (no coincide con su complementario respecto a L).

▶ Todo $M < L$ posee al menos un complemento lineal en L (no necesariamente único).

1.4. Suma directa externa de espacios lineales (espacio suma directa)

⌖ Sean dos espacios lineales L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo Λ, y sea el conjunto $L = L_1 \times L_2 = \{(x_1, x_2) \ :\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}$. Se definen las dos leyes de composición:

1) interna $(+)$,

$(L_1 \times L_2) \times (L_1 \times L_2) \xrightarrow{\ +\ } (L_1 \times L_2) \ \ :\ \ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in (L_1 \times L_2)$.

1) externa $(\bullet)$,

$\Lambda \times (L_1 \times L_2) \xrightarrow{\ \bullet\ } (L_1 \times L_2) \ \ :\ \ \alpha \bullet (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \ \ \forall \alpha \in \Lambda \ \ \forall (x_1, x_2) \in (L_1 \times L_2)$.

Entonces $(L, +, \bullet)$ es un espacio lineal, denominado como el *espacio suma directa externa* de L_1 y L_2 ($L = L_1 \oplus L_2$).

1.5. Dependencia e independencia lineal. Bases de Hamel.

⌖ Dado un subconjunto finito $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset L$ de vectores de L, se define como un *conjunto linealmente independiente* sii $\forall \alpha_i \in \Lambda \ :\ (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_i = 0 \ \ \forall i)$.

⌖ Dado un subconjunto infinito (numerable o no numerable) $S = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset L$ de vectores de L, se define como un *conjunto linealmente independiente* sii todo subconjunto finito de él lo es.

⌖ $S \subset L$ es un *conjunto linealmente dependiente* si no es linealmente independiente.

▶ **Propiedades**

a) Un conjunto linealmente independiente no puede contener al elemento nulo $\vec{0}$.
b) En un conjunto linealmente dependiente al menos un vector es combinación lineal de los restantes.
c) A linealmente dependiente con $A \subset B \ \Rightarrow\ B$ linealmente dependiente.
d) B linealmente independiente con $A \subset B \ \Rightarrow\ A$ linealmente independiente.

e) Dado $S=\{x_1,\dots,x_n\}\subset L$ linealmente independiente, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \;\Rightarrow\; \alpha_i=\beta_i \quad \forall i.$$

⌖ **Generadores:** Sea $M<L$. Se dice que $S\subset L$ es *conjunto generador* de M si $\forall x\in M \;:\; x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\;\; \alpha_i\in\Lambda,\; x_i\in S,\; n\in\mathbb{N}$.

⌖ **Bases lineales o de Hamel:** Sea $B\subset L$. Se dice que B es *base lineal o de Hamel* de L sii B es linealmente independiente y $[B]=L$.

▶ B es base lineal o de Hamel de L sii B es un conjunto linealmente independiente maximal, esto es, $\nexists B'\supset B,\; B'\neq B,$ tal que B' sea linealmente independiente.

▶ $[B]=L \;\Leftrightarrow\; \forall x\in L \;:\; x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\;\; \alpha_i\in\Lambda,\; x_i\in B\;\forall i,\; n\in\mathbb{N}$ finito.

▶ **Propiedades**

a) $\forall L\neq\{\vec{0}\}$ $\exists$ al menos una base de Hamel.

b) Dado un espacio lineal L, todas sus bases lineales poseen el mismo cardinal (es decir, el mismo número de vectores).

c) Dados un espacio lineal L y una base lineal B del mismo, la descomposición $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\;\; \alpha_i\in\Lambda,\; x_i\in B,\;\; n\in\mathbb{N}$, es única $\forall x\in L$.

d) Todo $S\subset L$, conjunto linealmente independiente, es ampliable a una base lineal de L.

⌖ **Dimensión lineal:** Dado L, se define su *dimensión lineal* o *algebraica* como $\dim L=\operatorname{card} B$, donde B es una base lineal de L y $\operatorname{card} B$ representa el cardinal de cualquiera de sus bases lineales.

Nota: [Cardinal de un conjunto] Dado un subconjunto S de elementos de un conjunto universal:
- Si S contiene un número finito $n\in\mathbb{N}$ de elementos, su cardinal se define como ese número: $\operatorname{card}(S) = n$.
- Si S es un conjunto infinito numerable (puede establecerse una biyección entre él y $\mathbb{N}$), su cardinal se define como el “aleph cero”, símbolo $\aleph_0$, esto es, $\operatorname{card}(S) = \aleph_0$. Por ejemplo, $\operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.
- Si S es un conjunto isomorfo con el cuerpo $\mathbb{R}$ de los reales, su cardinal se define como “el del continuo”, símbolo $\aleph_1$, esto es, $\operatorname{card}(S) = \aleph_1$. Por ejemplo, $\operatorname{card}([0,1]) = \operatorname{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

• Convenio: Si $L=\{\vec{0}\}$, entonces acordamos $\dim L=0$.

Dimensión lineal infinita: Dado L, se define su dimensión lineal como infinita cuando no es finita, esto es, cuando $\forall n\in \mathbb{N}\ \exists S\subset L$ que es conjunto linealmente independiente con $\text{card}\, S = n$.

Fórmula de Grassman: Dados $L,\ M < L,\ M' < L,$ con $\dim L = n$ (finita),

$$\Rightarrow \quad \dim(M+M') = \dim M + \dim M' - \dim(M\cap M').$$

2. OPERADORES LINEALES

2.1. Aplicaciones entre espacios lineales

Una aplicación T con dominio $D(T)$ y recorrido $R(T)$,
$T : D(T)\subset L_1 \to R(T)\subset L_2$, es *aplicación lineal* u *operador lineal* del espacio lineal L_1 sobre el espacio lineal L_2, ambos sobre el cuerpo común Λ, sii satisface:

a) $D(T) < L_1$
b) T es univaluada: $\forall x\in D(T)\ \exists! y\in R(T)\ :\ T(x) = y$ (*notación*: $y = Tx$),
c) $\forall x, y\in D(T),\ \forall \alpha,\beta\in\Lambda\ :\ T(\alpha x+\beta y) = \alpha T(x)+\beta T(y)$.

- Denominación: *aplicación lineal ≡ operador lineal ≡ homomorfismo.*

Una aplicación T con dominio $D(T)$ y recorrido $R(T)$,
$T : D(T)\subset L_1 \to R(T)\subset L_2$, es *aplicación antilineal* u *operador antilineal* del espacio lineal L_1 sobre el espacio lineal L_2, ambos sobre el cuerpo común $\Lambda = \mathbb{C}$, sii satisface:

a) $D(T) < L_1$
b) T es univaluada: $\forall x\in D(T)\ \exists! y\in R(T)\ :\ T(x) = y$ (*notación*: $y = Tx$),
c) $\forall x, y\in D(T),\ \forall \alpha,\beta\in\Lambda\ :\ T(\alpha x+\beta y) = \alpha^* T(x)+\beta^* T(y)$.

Propiedades:

Dada una aplicación lineal $T : D(T) < L_1 \to R(T)\subset L_2$, se tiene:

a) $R(T) < L_2$
b) $T(\overrightarrow{0_1}) = \overrightarrow{0_2}$ ($\overrightarrow{0_i}$ es elemento neutro de la ley $(+)$ en L_i, $i = 1, 2$)
c) $T(-x) = -T(x)\quad \forall x\in D(T)$
d) $\ker T = \left\{x\in D(T)\ :\ Tx = \overrightarrow{0_2}\right\} < L_1$ (*núcleo* o *kernel* del operador)
e) Si $D(T) = L_1$ y $\dim L_1$ es finita**:** $\dim D(T) = \dim\ker T + \dim R(T)$, denominándose *nulidad* de T a la $\dim\ker T$ y *rango* de T a la $\dim R(T)$.

2.2. Gráfico de un operador lineal

⊕ Dada una aplicación lineal $T: D(T) \subset L_1 \to R(T) \subset L_2$, se define su gráfico $\Gamma(T)$ como
$\Gamma(T) = \{(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2 \ : \ x_1 \in D(T), \ x_2 = Tx_1 \in R(T)\} \subset L_1 \times L_2$

▶ $\Gamma(T) < L_1 \oplus L_2$

▶ **Teorema del gráfico:** Un subespacio lineal $\Gamma(T) < L_1 \oplus L_2$ es gráfico de algún operador lineal entre L_1 y L_2 $\Leftrightarrow$ $((\vec{0}_1, y) \in \Gamma \ \Rightarrow \ y = \vec{0}_2)$ (esto es, si Γ corta al eje L_2, lo hace sólo en el origen).

⊕ **Igualdad entre operadores lineales:** Dados dos operadores lineales T_1 y T_2, son *iguales* $\Leftrightarrow$ $\Gamma(T_1) = \Gamma(T_2)$ $\Leftrightarrow$ $D(T_1) = D(T_2) = D(T)$ y $T_1 x = T_2 x \ \forall x \in D(T)$.

⊕ **Extensiones y restricciones:** Dados dos operadores lineales T_1 y T_2, tales que $D(T_1) \subset D(T_2)$ y $T_1 x = T_2 x \ \forall x \in D(T_1)$, entonces T_2 es una *extensión* de T_1 a $D(T_2)$, y T_1 es una *restricción* de T_2 a $D(T_1)$.

▶ **Notación:**

- $T_2 \supset T_1$ »» T_2 es una extensión de T_1.
- $T_1 \subset T_2$ »» T_1 es una restricción de T_2.

2.3. Operador lineal inverso

⊕ Dado $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$, operador lineal, la relación inversa $T^{(-1)}$ se define como $T^{(-1)}: D(T^{(-1)}) = R(T) \to R(T^{(-1)}) = D(T)$ tal que $\forall y \in D(T^{(-1)}) = R(T)$, se tiene $T^{(-1)}(y) = x$, con $x \in D(T)$ y $T(x) = y$.

Nota: en general, $T^{(-1)}$ no tiene por qué ser un operador, ya que, por ejemplo, no tiene por qué ser univaluada.

▶ **Teorema:** Dado $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$, operador lineal, la relación inversa $T^{(-1)}: R(T) \to D(T)$ es un operador lineal T^{-1} $\Leftrightarrow$ T es inyectivo, esto es, $(T(x_1) = T(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2)$ $\Leftrightarrow$ $(Tx = \vec{0}_2 \Rightarrow x = \vec{0}_1)$, o sea, $\ker T = \{\vec{0}_1\}$.

⊕ **Operador singular:** Dado $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$, operador lineal, definimos T como *operador singular* (*no-singular*) $\Leftrightarrow$ $\nexists(\exists)\ T^{-1}: R(T) \to D(T)$ operador lineal.

2.4. Isomorfismo

⌖ Dado $T: D(T) = L_1 \to L_2$, operador lineal, es un *isomorfismo* sii es biyectivo.

⌖ Si $T: L_1 \to L_2$ es un isomorfismo, entonces los espacios lineales L_1 y L_2 son *espacios isomorfos*.

- Notación: L_1 y L_2 son isomorfos »» $L_1 \approx L_2$.

▶ Un isomorfismo $T: L_1 \to L_2$ transforma conjuntos linealmente independientes (de L_1) en conjuntos linealmente independientes (de L_2).

▶ $L_1 \approx L_2 \iff \dim L_1 = \dim L_2$.

▶ Un operador lineal $T: L_1 \to R(T) < L_2$ es isomorfismo $\iff$ $\ker T = \{\vec{0}_1\}$ y $R(T) = L_2$.

▶ Si $T: L_1 \to L_2$ es un isomorfismo $\Rightarrow$ $T^{-1}: L_2 \to L_1$ es un isomorfismo.

▶ **Terminología:**

- Homomorfismo $\equiv$ aplicación lineal $\equiv$ operador lineal $\equiv T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$ (univaluada y lineal).
- Monomorfismo $\equiv$ aplicación lineal inyectiva.
- Epimorfismo $\equiv$ aplicación lineal suprayectiva.
- Endomorfismo $\equiv$ operador lineal con $L_1 = L_2$.
- Isomorfismo $\equiv$ aplicación lineal biyectiva.
- Automorfismo $\equiv$ isomorfismo con $L_1 = L_2$.

▶ Dado un operador lineal $T: L_1 \to L_2$ con $\dim L_1 = \dim L_2 = n$ finito, se tiene que cualquier monomorfismo o epimorfismo es automáticamente un isomorfismo.

2.5. Operaciones con operadores lineales

⌖ *Suma* y *producto por escalares* de operadores lineales:
Dados $T_i: D(T_i) < L_1 \to R(T_i) < L_2$, $i = 1, 2,$, operadores lineales, se define:

- El operador suma $T_1 + T_2$ según:

$$\begin{aligned}(T_1+T_2): D(T_1+T_2) = (D(T_1)\cap D(T_2)) < L_1 \to R(T_1+T_2) < L_2 \\ (T_1+T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \quad \forall x \in D(T_1+T_2)\end{aligned}.$$

- El operador producto por un escalar αT_i $(i = 1 \ o \ 2)$, $\alpha \in \Lambda$, según:

$$\begin{aligned}(\alpha T_i): D(\alpha T_i) = D(T_i) < L_1 \to R(\alpha T_i) < L_2 \\ (\alpha T_i)(x) = \alpha T_i(x) \quad \forall x \in D(T_i)\end{aligned}.$$

▶ La suma y el producto por escalares de operadores lineales definen operadores lineales.

⌖ Composición o producto de operadores lineales:

Dados los operadores lineales

$$T_1 : D(T_1) < L_1 \to R(T_1) < L_2$$

$$T_2 : D(T_2) < L_2 \to R(T_2) < L_3 \quad ,$$

siendo $L_i, \; i = 1, 2, 3$,espacios lineales sobre el mismo cuerpo Λ , se define la *composición* o *producto* $T_2 \circ T_1 \equiv T_2 T_1$ como el operador

$T_2 T_1 : D(T_2 T_1) < L_1 \to R(T_2 T_1) < L_3$ tal que

1) $D(T_2 T_1) = T_1^{(-1)}(M = D(T_2) \cap R(T_1)) = \{x \in D(T_1) \; : \; T_1 x \in D(T_2)\} < D(T_1)$

2) $R(T_2 T_1) = T_2(M) = \{y \in R(T_2) \; : \; \exists x \in M : \; T_2 x = y\} < R(T_2)$

3) $\forall x \in D(T_2 T_1) \; : \; T_2 T_1(x) = T_2(T_1(x)) \in R(T_2 T_1)$.

Nota: ¡No confundir $T_2 \circ T_1 \equiv T_2 T_1$ con una posible operación producto (•) de operadores $T_i : D(T) < L \to R(T_i) < L, \; i = 1, 2, \ldots,$ según el cual se definiera $(T_2 \bullet T_1)(x) = T_2(x) \bullet T_1(x) \;\; \forall x \in D(T_1) = D(T_2) < L$, una vez definido también un producto **interno** (•) en L !.

▶ La composición de operadores lineales da como resultado otro operador lineal.

▶ La composición de isomorfismos da como resultado otro isomorfismo.

▶ **Teorema:** Dado $T : D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$, operador lineal no singular, de modo que $T^{-1} : R(T) < L_2 \to D(T) < L_1$ es un operador lineal , entonces $\Rightarrow T^{-1}T = I_{D(T)}$ y $TT^{-1} = I_{R(T)}$, donde $I_D, \; D \equiv D(T) \; o \; R(T)$, simboliza la restricción del operador identidad $I_i : L_i \to L_i, \; I_i(x) = x \;\; \forall x \in L_i$, al dominio $D < L_i$, es decir, el operador $I_D : D \to D, \; I_D(x) = x \;\; \forall x \in D$.

⌖ Operador invertible:

Dado $T : D(T) < L \to R(T) < L$, operador lineal, definimos T como *operador invertible* $\Leftrightarrow \; D(T) = R(T) = L$ y T es operador no-singular

$\Leftrightarrow \; \exists \, T, T^{-1}$, operadores lineales, y $TT^{-1} = T^{-1}T = I_L \equiv I$.

⌖ Conmutación y permutación de operadores:

Dados $T_i : D(T_i) < L \to R(T_i) < L, \; i = 1, 2,$, operadores lineales, y definidos sus productos o composiciones $T_2 \circ T_1 \equiv T_2 T_1$ y $T_1 \circ T_2 \equiv T_1 T_2$, se define:

1) El *operador conmutador* $[T_1,T_2]$ según $[T_1,T_2]=T_1T_2-T_2T_1$, con $D([T_1,T_2])=D(T_1T_2)\cap D(T_2T_1)$.

2) T_1 y T_2 *conmutan entre sí* $\Leftrightarrow$ $[T_1,T_2]=0$ $\Leftrightarrow$ $T_1T_2=T_2T_1$.

3) T_i *permuta con* T_j $\Leftrightarrow$ $T_iT_j\subset T_jT_i$.

2.6. Espacio lineal $\mathcal{L}(L_1,L_2)$

⌖ Dados dos espacios lineales L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo Λ, la clase o conjunto de todas las aplicaciones u operadores lineales $T:D(T)=L_1\rightarrow R(T)<L_2$ constituye un espacio lineal sobre Λ, con respecto a la suma y producto por escalares.

● ***Notación***: este espacio lineal se simboliza como $\mathcal{L}(L_1,L_2)$; si $L_1=L_2$, entonces $\mathcal{L}(L,L)\equiv\mathcal{L}(L)$.

▶ **Propiedades:**

a) $\mathcal{L}(L_n,L_m)$, $n,m\in\mathbb{N}$, finitos, es isomorfo con $\mathcal{M}^{m\times n}\equiv$ espacio lineal de las matrices $m\times n$ de elementos pertenecientes a Λ (L_n y L_m son, pues, espacios lineales de dimensión finita respectiva n y m, sobre el mismo cuerpo Λ).

b) $\dim\mathcal{L}(L_n,L_m)=\dim L_n\cdot\dim L_m$.

c) Dado $T\in\mathcal{L}(L_1,L_2)$, en general $R(T)\subsetneq L_2$, de forma que, incluso aunque $\exists\, T^{-1}$, operador lineal, se tiene $D(T^{-1})\subsetneq L_2\Rightarrow T^{-1}\notin\mathcal{L}(L_2,L_1)$.

2.7. Álgebra

⌖ Un *álgebra* se define como un espacio lineal L sobre un cuerpo Λ, en el que a cada par de elementos a y b de L se le asocia otro elemento ab de L, denominado como producto de los anteriores, *elemento producto* de a y b, tal que se satisfacen los axiomas:

Ax.1: $a(b+c)=ab+ac$
Ax.2: $(b+c)a=ba+ca$
Ax.3: $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)\quad\forall\alpha\in\Lambda$
Ax.4: $a(bc)=(ab)c$ (propiedad asociativa) .

⌖ Se dice que un álgebra posee un *elemento unidad* e_2 $\Leftrightarrow$
$\exists\, e_2\in L:\ e_2a=ae_2=a\quad\forall a\in L$

▶ El producto o composición de operadores dota al espacio $\mathcal{L}(L)$ de la estructura de álgebra con elemento unidad, $e_2\equiv I$, operador identidad, para el que $IT=TI=T\quad\forall T\in\mathcal{L}(L)$.

2.8. Proyectores

⌖ Dados dos subespacios lineales $M_1 < L$ y $M_2 < L$ del mismo espacio lineal L, tales que $L = M_1 \oplus M_2$, se define un *proyector de* L *sobre* M_1 *en la dirección de* M_2, $P_{M_1}^{M_2} \equiv P_{M_1}$, como un operador $P_{M_1} : D(P_{M_1}) = L \to R(P_{M_1}) = M_1$ tal que $\forall x \in L : P_{M_1}(x) = x_1$, donde $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2$.

Propiedades:

a) $P_{M_1} \in \mathcal{L}(L)$, es decir, es un operador lineal $P_{M_1} : L \to R(P_{M_1}) < L$.

b) $P_{M_1}^2 \equiv (P_{M_1})^2 = P_{M_1} P_{M_1} = P_{M_1}$, es decir, es un *operador idempotente*.

c) Dado $P_{M_1} \Rightarrow \exists\ (P_{M_1})^{-1} \equiv P_{M_1}^{-1}$, operador lineal tal que

$P_{M_1}^{-1} \in \mathcal{L}(L) \iff M_2 = \{\vec{0}\} \iff L = M_1$.

d) Dado $P \in \mathcal{L}(L)$, operador idempotente, $\Rightarrow \exists!\ M_1 < \mathrm{L},\ \exists!\ M_2 < \mathrm{L} : \mathrm{L} = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$ y $P = P_{M_1}$.

e) Dado $P_{M_1}^{M_2} \Rightarrow R(P_{M_1}^{M_2}) = M_1$ y $\ker(P_{M_1}^{M_2}) = M_2$.

f) Dado $T \in \mathcal{L}(L)$, T es proyector $\iff T^2 = T$ (es decir, sii es idempotente).

2.9. Funcional lineal. Espacio dual L^*.

⌖ Dado un espacio lineal L sobre un cuerpo Λ se define como *funcional lineal* o *forma lineal* en L a todo operador lineal $t : D(t) < L \to \Lambda$.

⌖ Dado un espacio lineal L sobre un cuerpo Λ se define como su *espacio dual* L^* (*dual algebraico*) el espacio lineal $\mathcal{L}(L, \Lambda)$ de todos los funcionales lineales $t : D(t) = L \to \Lambda$.

Propiedades:

a)Todo funcional lineal no nulo, $t : L \to \Lambda,\ t \neq 0,$ es suprayectivo (es decir, $R(t) = \Lambda$).

b) $L_n \approx L_n^* \approx \Lambda^n$.

3. ESPACIO COCIENTE

- Dados un espacio lineal L y un subespacio lineal $M < L$ del mismo, se define en L la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ (por tanto, reflexiva, $x\mathcal{R}x\ \forall x\in L$; simétrica, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$; y transitiva, $x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$) según: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y\in M$.
- Se nota entonces como $\mathcal{C}_x$ la clase de equivalencia de un $x\in L$, es decir, $\mathcal{C}_x=\{y\in L\ :\ y\mathcal{R}x\}=\{y\in L\ :\ \exists\, z\in M\ :\ y=x+z\}=\{x\}+M$.
- El conjunto cociente $L/M=\{\mathcal{C}_x\ :\ x\in L\}$ es la partición (única) de L inducida por M .

⌖ Se define el *espacio cociente* $(L/M,+,\bullet)$ como el espacio lineal construido sobre el conjunto L/M definiendo las leyes de composición

1) $(+)$, ley de composición interna $L/M\times L/M \xrightarrow{+} L/M\ :\ \mathcal{C}_x+\mathcal{C}_y=\mathcal{C}_{x+y}$, con elemento opuesto $-\mathcal{C}_x=\mathcal{C}_{-x}=\{-x\}+M$ y elemento neutro $\mathcal{C}_{\vec{0}}=\{\vec{0}\}+M=M$.

2) $(\bullet)$, ley de composición externa $\Lambda\times L/M \xrightarrow{\bullet} L/M\ :\ \alpha\bullet\mathcal{C}_x=\mathcal{C}_{\alpha x}$.

► $\dim L/M=\dim L-\dim M$.

