MÉTODOS MATEMÁTICOS
ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Profesora: Mª Cruz Boscá

TEMA 1: ESPACIOS LINEALES NORMADOS

0. ESPACIOS TOPOLÓGICOS (introducción)

- Sean un conjunto universal arbitrario $X \neq \emptyset$ y un subconjunto τ del conjunto potencia de X, $\tau \subset P(X) = \{S: S \subset X\}$.

0.1. Topología. Espacio topológico.

- Definición: τ es una *topología sobre o para X* sii
Ax.1. $X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$
Ax.2. $A_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$
Ax.3. $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$, n finito
- El par (X, τ) define un *espacio topológico*.

- Ejemplos:
1) Topología *indiscreta* o *trivial*: $\tau = \{X, \emptyset\}$
2) Topología *discreta*: $\tau = P(X)$

- $A \subset X$ es *abierto* $\Leftrightarrow$ $A \in \tau$
- $C \subset X$ es *cerrado* $\Leftrightarrow$ $C^c = \{x \in X : x \notin C\}$ es abierto ($C^c \equiv$ *complementario* de C en X).
- $A \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow$ A^c es cerrado
- X y Ø son abiertos y cerrados.
- La unión finita de cerrados es cerrado.

- Nota 1: "Dualidad": Cualquier proposición es válida cambiando *abierto* por *cerrado* y *unión* por *intersección* (y viceversa).
- Nota 2: Sobre un X dado se pueden definir muchas topologías τ diferentes.

0.2. Entornos

- Definición: Dado $x \in X$ ($S \subset X$), definimos un *entorno abierto* de x (de S), $N_A(x)$ (N_A), como cualquier abierto, $A \in \tau$, tal que $x \in A$ ($S \subset A$).
- Definición: Dado $x \in X$ ($S \subset X$), definimos un *entorno* de x (de S), N(x) (N), como cualquier conjunto que contenga un entorno abierto de x (S).
- Definición: x es *punto interior* de S $\Leftrightarrow$ S es entorno de x.
- Definición: x es *punto de acumulación* de S $\Leftrightarrow$ todo entorno de x contiene puntos de S distintos de x (no necesariamente $x \in S$).

0.3. Topología relativa o inducida por un conjunto. Subespacio topológico.

- Dados un espacio topológico (X, τ) y un conjunto $S \subset X$, se define la *topología relativa a* o *inducida por S*, o *restricción de τ a S*, como
$\tau_S = \{A_S = A \cap S, A \in \tau\}$,
definiéndose (X, τ_S) como *subespacio topológico* del espacio topológico (X, τ).

0.4. Bases

- Definición: Dado un espacio topológico (X, τ), una familia de abiertos $B = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $I \equiv$ conjunto de índices no necesariamente numerable,
$B_\alpha \in \tau\ \forall \alpha$, se denomina *base de la topología τ* $\Leftrightarrow \forall A \in \tau, A \neq \emptyset,\ A = \bigcup_{\alpha \in J \subset I} B_\alpha \in \tau$
(i.e.: todo abierto puede obtenerse como unión de conjuntos de la base). Cada B_α se denomina *abierto básico*.

0.5. Recubrimientos y compacidad

- Definición: Dados (X, τ) y $S \subset X$, un *recubrimiento* o *cubrimiento* de S es una clase o familia de conjuntos de X tales que su unión contiene a S.
- Definición: Dados (X, τ) y $S \subset X$, un *recubrimiento* o *cubrimiento abierto* de S es un recubrimiento cuyos conjuntos son abiertos.
- Definición: Dados (X, τ), $S \subset X$ y un recubrimiento de S, un *subrecubrimiento* o *subcubrimiento* de S es otro recubrimiento de S incluido en el dado.

- Definición: (X, τ) es *compacto* sii de todo recubrimiento abierto de X se puede extraer un subrecubrimiento finito (propiedad de Borel-Lebesgue).
- Definición: Dado (X, τ), $S \subset X$ es *compacto* sii (X, τ_S) es compacto.

- Dados (X, τ) compacto y $S \subset X$, S cerrado $\Rightarrow$ S es compacto.
- Definición: (X, τ) es *espacio de Hausdorf* sii $S \subset X$, S compacto $\Rightarrow$ S cerrado.

-(X, τ) *compacto* $\Rightarrow$ todo $S \subset X$ infinito posee un punto de acumulación (puede pertenecer o no a S) (propiedad de Bolzano-Weirstrass).

1. ESPACIOS MÉTRICOS

1.1. Métrica. Espacio métrico.

- Definición: Una *métrica* sobre un conjunto universal arbitrario $X \neq \emptyset$ es una aplicación $d: X \times X \rightarrow R$ que satisface:
Ax.1. $d(x,y) \geq 0\ \forall x,y \in X$
Ax.2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$
Ax.3. $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x,y \in X$ (simetría)
Ax.4. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)\ \forall x,y,z \in X$ (relación triangular)

- El par (X,d) define un *espacio métrico*.
- El real $d(x,y) \in R$ se denomina *distancia* entre los puntos x e y.

-Propiedades:
1) $d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)| \quad \forall\, x,y,z \in X$

2) $d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$

-Sobre un mismo X son definibles muchas métricas distintas, generándose diferentes espacios métricos.

1.2. Bolas

- Definiciones:
1) *Bola abierta de centro x_0 y radio r*, $r \in R$, $r > 0$:
$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \equiv B(x_0, r)$

2) *Bola cerrada de centro x_0 y radio r*, $r \in R$, $r > 0$:
$B_r[x_0] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \equiv B[x_0, r]$

1.3. Topología inducida por una métrica o natural

- Una métrica permite dotar a un conjunto de una topología: todo espacio métrico es espacio topológico.
-Nota: No todo espacio topológico es metrizable, es decir, espacio métrico: no siempre τ deriva de una métrica.

- *Conjunto abierto* en términos de bolas:
1) $A \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow \ \forall\ x \in A\ \exists\, r > 0 : x \in B_r(x) \subset A$
2) $A \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow$ es unión de bolas abiertas
3) Toda bola abierta es un abierto

- Topología natural o topología inducida por d en X:
$\tau = \{A \subset X : A \text{ es abierto}\}$ es una topología sobre X, es decir, (X, τ) es un espacio topológico.

- Nota: Si un espacio topológico es metrizable, hay muchas métricas sobre X que inducen la misma τ.

-Base de la topología natural: El conjunto de todas las bolas abiertas del espacio métrico,
$B = \{B : B = B_r(x), r \in R, r > 0\}$, es *base de la topología natural*.

- $x \in S \subset X$ es punto interior de S $\Leftrightarrow\ \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset S$.

- Definición: $x \in X$ es *punto adherente* de $S \subset X \Leftrightarrow \forall\, r > 0 : B_r(x) \cap S \neq \emptyset$.

- Definición: La *clausura* de S se define como $\bar{S} = \{x \in X : x \text{ es punto adherente de } S\}$.

- Definición: $x \in X$ es *punto de acumulación* o *punto límite* de $S \subset X$
$\Leftrightarrow\ \forall\, r > 0 : B_r(x) \cap S$ contiene algún punto de S distinto de x
$\Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in S,\ a \neq x$ tal que $d(a,x) < \varepsilon$
$\Leftrightarrow\ \forall\, r > 0 : B_r(x) \cap S$ contiene infinitos (y distintos) puntos de S.

- Definición: El *conjunto derivado* del $S \subset X$ se define como
$S' = \{x \in X : x \text{ es punto de acumulación de } S\}$.

- $x \in X$ es punto de acumulación de $S \subset X \Leftrightarrow$ x es punto adherente de S - {x}.

- $S \subset \overline{S}$; $\overline{S} = S \cup S'$; $S_1 \subset S_2 \Rightarrow \overline{S_1} \subset \overline{S_2}$; $\overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$.

- S es *cerrado* $\Leftrightarrow$ $S = \overline{S}$ $\Leftrightarrow$ su complementario en X es abierto $\Leftrightarrow S' \subset S$.

-$\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ ($\overline{S}$ es cerrado).

-B[x,r] es cerrado (Nota: pero, en general, y siendo siempre ambos cerrados, $B[x,r] \neq \overline{B(x,r)}$; por ejemplo, en la τ discreta).

-Definición: $S \subset X$ es *acotado* $\Leftrightarrow$ $\exists$ B(x,r) : $S \subset$ B(x,r).

1.4. Subespacio métrico

- Definición: dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $S \subset X$, $S \neq \emptyset$, se define la *restricción de la métrica a S* como la aplicación
d_S: $S \times S \rightarrow R$ que satisface $d_S(x,y) = d(x,y)$ $\forall (x,y) \in S \times S \subset X \times X$.

- El par (S,d_S) constituye un espacio métrico que se define como *subespacio métrico* del (X,d).

- La topología natural en (S,d_S), o topología inducida por d_S en S, coincide con la topología inducida por S en X, τ_S, de forma que todo subespacio métrico es subespacio topológico.

1.5. Métricas producto

- Definición: Dados (X, d_x), (Y, d_y) y $Z = X \times Y$, se define la *métrica producto* d como la aplicación d: $Z \times Z \rightarrow R$ tal que
$d(z_1, z_2) = [d_x^2(x_1, x_2) + d_y^2(y_1, y_2)]^{1/2}$, $z_i = (x_i, y_i) \in Z$, i=1,2,
definiéndose (Z, d) como el *espacio métrico producto*.

-La *topología natural* de (Z, d) es la topología producto de las topologías naturales de (X, d_x) e (Y, d_y).

- Son posibles otras definiciones para la métrica producto. Es frecuente, por ejemplo, definir en el espacio suma directa externa de dos dados la métrica producto
$d(z_1, z_2) = d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2)$.

1.6. Separabilidad

- Definición: $S \subset X$ es *denso en* X $\Leftrightarrow$ $\overline{S} = X$.

- Definición: (X, τ) es *separable* sii contiene un subconjunto a lo sumo numerable denso en X.
- Ejemplo: (R, d) es separable puesto que Q es denso en R.

- Sean (X, d) y $S \subset X$; S es denso en X $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists s \in S$: $d(x, s) < \varepsilon$.

1.7. Compacidad

- (X, d) es compacto $\Leftrightarrow$ todo $S \subset X$ infinito posee un punto de acumulación (puede pertenecer o no a S) (propiedad de Bolzano-Weirstrass) $\Leftrightarrow$ toda sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.

- Dado (X, d), $S \subset X$ es *compacto* $\Rightarrow$ S es cerrado y acotado.

- Dado (X, d), $S \subset X$ es *compacto* $\Leftrightarrow$ toda sucesión de puntos de S contiene una subsucesión convergente en S.

-En $\mathbb{k}^n$ (n-espacio euclídeo), $S \subset \mathbb{k}^n$ es compacto $\Leftrightarrow$ S es cerrado y acotado.

-La compacidad es un invariante topológico (la imagen homeomórfica de un compacto es otro compacto).

1.8. Convergencia de sucesiones

- Sea $\{x_n\} \subset X$, sucesión de puntos de un espacio métrico (X, d). Se dice que la sucesión *converge* o *tiende* a un límite x, $x_n \to x$, $\Leftrightarrow$ $\forall\, r > 0\ \exists\, n_0 \in N : x_n \in B(x, r)\ \forall\ n \geq n_0$
$\Leftrightarrow$ $d(x_n,x) \to 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in N : d(x_n,x) < \varepsilon\ \forall\ n \geq n_0$.

1.9. Aplicaciones continuas entre espacios métricos

- Sean (X, d_x) e (Y, d_y), y sea una aplicación $f : D_f \subset X \to Y$.

-Definición: Se dice que f es *continua en el punto* $x_0 \in D_f$
$\Leftrightarrow$ $\forall \{x_n\} \subset D_f$: $(x_n \to x_0)$ $\Rightarrow$ $(f(x_n) \to f(x_0))$ (notación: $\lim f(x_n) \to f(\lim x_n)$)
$\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : d_y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ siempre que $d_x(x,x_0) < \delta$
$\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ ("puntos cercanos a x_0 se aplican por f en puntos cercanos a $f(x_0)$")

-Definición: $f : S \subset X \to Y$ es *continua en* S sii es continua $\forall\, x \in S$.
-El producto de aplicaciones continuas es una aplicación continua.

-Definición: Se dice que f es *uniformemente continua en* D_f
$\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : d_y(f(x),f(y)) < \varepsilon$ siempre que $d_x(x,y) < \delta$, $y \in D_f$, $\forall\, x \in D_f$ (o sea, $\delta \neq \delta(x)$).
- Si f es uniformemente continua en D_f $\Rightarrow$ f es continua en D_f.

-Si D_f es compacto y f es continua en D_f $\Rightarrow$ f es uniformemente continua en D_f .

-Si D_f es compacto y $f : D_f \subset X \to R$ es continua en D_f $\Rightarrow$ f posee un mínimo y un máximo en D_f .

1.10. Isometrías

- Definición: $f : X \to Y$ es una *isometría* $\Leftrightarrow$ $d_y(f(x), f(y)) = d_x(x, y)$ $\forall\, x, y \in X$ ("preserva las distancias").
- $f : X \to Y$ es una *isometría biyectiva* $\Rightarrow$ f es bicontinua (f y f^{-1} son continuas).

- (X, d_x) e (Y, d_y) son *isométricos* $\Leftrightarrow$ $\exists\ f : X \to Y$ isometría biyectiva

$\equiv$ son métrica y topológicamente equivalentes entre sí.

- Toda isometría (o, más generalmente, toda contracción, $d_y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_x(x, y)$, con $0 \leq c < 1$) es uniformemente continua.

● Sean un espacio lineal $L \equiv (X, +, \cdot)$ sobre el cuerpo K y una topología τ sobre X.

◈ Espacio lineal topológico

- Noción: Un *espacio lineal topológico* es un triplete (X, L, τ) donde τ no es una topología cualquiera, sino una de las compatibles con los axiomas definitorios correspondientes (especificados más adelante para el caso particular de espacio lineal métrico), que son los que la hacen compatible con la estructura de espacio lineal.

● Sean un espacio lineal $L \equiv (X, +, \cdot)$ sobre el cuerpo K y una métrica d sobre X, esto es, un espacio métrico (L, d).

■ Espacio lineal métrico

- Definición: L es un *espacio lineal métrico* sii se satisfacen los siguientes axiomas:
Ax.1. La aplicación $f_s : L \times L \to L$, definida según $f_s(x, y) = x + y \;\; \forall\, x, y \in L$, es continua en $L \times L$.
Ax.2. La aplicación $f_\pi : K \times L \to L$, definida según $f_\pi(\alpha, x) = \alpha\cdot x \quad \forall\, \alpha\in K, \; \forall\, x\in L$, es continua en $K \times L$.

- Todo espacio lineal métrico es espacio lineal topológico (es decir, la topología derivada de la métrica es compatible con los axiomas correspondientes).

- Notación: Notaremos $L\equiv (X, L, d) \equiv (L,d)$, indistintamente, para un espacio lineal métrico.

- Si una métrica d satisface:
1) es invariante bajo traslaciones: $d(x+z, y+z) = d(x, y) \;\; \forall\, x, y, z\in L$
2) aumenta proporcionalmente a la dilatación: $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y) \;\; \forall\, x, y\in L \;\; \forall\, \alpha\in K$,
entonces $\Rightarrow$ (L, d) es un espacio lineal métrico.

■ Subespacio lineal métrico

- Sea L un espacio lineal métrico y sea $M < L$, subespacio lineal de L. El espacio lineal métrico (M,d) se denomina subespacio lineal métrico de L.
- Si M es un subconjunto cerrado de L, se dice que M es un *subespacio lineal métrico* cerrado de L, y se representa $M \triangleleft L$.
- $M < L \Rightarrow \overline{M} \triangleleft L$

■ Isomorfismo isométrico

- Definición: Dados L_1 y L_2, espacios lineales métricos, una aplicación $T : L_1 \to L_2$ se define como *isomorfismo isométrico* entre L_1 y L_2 sii satisface:
1) T es un isomorfismo (operador lineal y biyectivo)
2) T es una isometría (preserva las distancias, es decir, $d_2(Tx, Ty) = d_1(x, y) \;\; \forall\, x, y\in L_1$)

- Definición: Si $T : L_1 \to L_2$ es un isomorfismo isométrico, se dice que L_1 y L_2 son *isomorfos isométricamente*.

- Nota: Todos los espacios lineales métricos de igual dimensión finita son isomorfos topológicamente entre sí (es decir: existe un *homeomorfismo lineal*, o isomorfismo bicontinuo, entre ellos), notación: $L_1 \mp L_2$, pero no todos lo son isométricamente.

• Sea un espacio lineal $L \equiv (\mathbf{X}, +, \cdot)$ sobre el cuerpo $\mathbb{k}$.

Norma y espacio lineal normado

Definición: Una *norma* $\|\cdot\|$ sobre un espacio lineal L es una aplicación de L sobre $\mathbb{R}$ (en realidad, $\mathbb{R}_0^+$), $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$, tal que satisface los axiomas:

Ax.1: $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in L$

Ax.2: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ax.3: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$ (*relación triangular*)

Ax.4: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{k} \;\; \forall x \in L$ (*homogeneidad positiva*)

Definición: El par $(L, \|\cdot\|)$ define un *espacio normado* o *espacio lineal normado.*

▶ Un espacio normado es un espacio lineal métrico en el que la métrica deriva de, o es inducida por, una norma:
$(L, \|\cdot\|)$ es espacio lineal métrico (L, d) con $d(x,y) = \|x-y\| \quad \forall x, y \in L$.
Nota: Pero no todo espacio lineal métrico es espacio normado.

Propiedades

▶ $\|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big| \quad \forall x, y \in L$.

▶ La métrica d inducida por la norma es tal que
   a) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (invariante bajo traslaciones)
   b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \; d(x,y)$ (aumenta proporcionalmente a la dilatación).

▶ Todo espacio lineal métrico en el que la métrica es invariante bajo traslaciones y aumenta proporcionalmente a la dilatación, es espacio normado, con $\|x\| = d(\mathrm{x}, 0) \quad \forall x \in L$.

▶ En todo espacio normado $B[x,r] = \overline{B(x,r)}, \;\; x \in L, \; r \in \mathbb{R}, \; r > 0$.

▶ Lema: Dado un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$ y un subconjunto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ linealmente independiente,
$\exists C > 0 \;\; / \;\; \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq C(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \quad \forall \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathbb{k}$.

Isomorfismos

Definición: Dos espacios normados $L_1 \equiv (L_1, \|\cdot\|_1)$ y $L_2 \equiv (L_2, \|\cdot\|_2)$ son *isomorfos en norma* $\Leftrightarrow \exists\, T: \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_2$, aplicación lineal de L_1 en L_2, tal que:
   a) T es un isomorfismo entre los espacios lineales.
   b) T preserva la norma: $\|Tx\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{L}_1$.

-Notación: $L_1 \simeq L_2$.

► Todo isomorfismo en norma es isomorfismo isométrico, y viceversa cuando la métrica procede de una norma.

► Todos los espacios normados de igual dimensión finita n son isomorfos topológicamente ($\mp$) entre sí (pero no siempre lo son isométricamente , $\simeq$).

Subespacio lineal normado

⌖Definición: Sea M<L, entonces el espacio normado $(M,\|\cdot\|)$ (restricción de la métrica a M) constituye un *subespacio lineal normado*, o *subespacio* $M < L$ del L.

⌖ Si $M < L$ es cerrado, $M = \overline{M}$, lo simbolizaremos como $M \triangleleft L$.

► Todo $M < L_n$ es $M = \overline{M}$ y, por lo tanto, $M \triangleleft L_n$.

► $M < L,\ \dim M = n$ finita $\Rightarrow\ M = [M] = \overline{[M]} = \overline{M}\ \Rightarrow\ M \triangleleft L$.

-Nota: en algunos textos se define subespacio requiriendo a M que sea cerrado algebraica y topológicamente, es decir, $M < L$ y $M = \overline{M}$.

■ Sucesiones

⌖ Definición: Dado $(L,\|\cdot\|)$, se define una *sucesión* o *secuencia* de vectores o puntos de L como el recorrido de una aplicación de $\mathbb{N}$ en L.

-Notación: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

⌖ Definición: Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos ("vectores" o "puntos") de un espacio normado L *converge a un* $x \in L$, denominado su *límite,*

$$\Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ /\ \|x_n - x\| < \varepsilon\ \ \forall n > n_0$$

$$\Leftrightarrow \forall r > 0\ \exists n_0(r) \in \mathbb{N}\ /\ x_n \in B(x,r)\ \ \forall n \geq n_0 .$$

-Notación: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$; $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$; $x_n \to x$.

► El límite de una sucesión es único.

-Notas: El límite de una sucesión no tiene por qué pertenecer a la sucesión; toda subsucesión de una sucesión convergente converge a ese mismo límite; el límite de una sucesión no tiene por qué ser punto de acumulación del conjunto de los elementos de la sucesión; una sucesión puede ser no convergente y el conjunto de elementos de esa sucesión puede tener un punto de acumulación.

⌖ Definición: Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de un espacio normado L es *sucesión de Cauchy* o *sucesión fundamental* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n>m\to\infty}\|x_n - x_m\| = 0$.

► Dado $(L,\|\cdot\|)$, toda sucesión convergente es de Cauchy.

► ⌖ Dados $(L,\|\cdot\|)$ y $S \subset L$, $x \in \overline{S}\ \Leftrightarrow\ \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S\ /\ x_n \to x$.

▶ Dados $(L,\|\cdot\|)$ y $S\subset L$, S es cerrado $\Leftrightarrow$ toda sucesión de elementos de S convergente tiene su límite en S, esto es, $x_n\in S\ \forall n,\ x_n\to x\ \Rightarrow\ x\in S$.

▶ Dados $(L,\|\cdot\|)$ y $S\subset L$, S es cerrado $\Leftrightarrow$ $\overline{S}=S$.

▶ Dados $(L,\|\cdot\|)$ y $S\subset L$, S compacto $\Rightarrow S$ cerrado y acotado.

▶ Dados $(L_n,\|\cdot\|)$ y $S\subset L_n$, S es compacto $\Leftrightarrow$ S es cerrado y acotado.

▶ Dados $(L,\|\cdot\|)$ y $S\subset L$, x es punto de acumulación de S $\Leftrightarrow$ existe una sucesión de infinitos puntos distintos de S que converge a x.

⌖ Definición: Un *subconjunto* $S\subset L$ se define como *completo* $\Leftrightarrow$ toda sucesión de Cauchy de elementos de S converge a un elemento de S.

▶ En un espacio normado L, dado $S\subset L$ completo $\Rightarrow S$ es cerrado.

◈ Sean dos espacios normados $L_1\equiv(L_1,\|\cdot\|_1)$ y $L_2\equiv(L_2,\|\cdot\|_2)$.

▶ El *espacio normado suma directa* de L_1 y L_2 se define como el espacio normado $\left(L_1\oplus L_2,\|\cdot\|\right)$, definiéndose $\|(x,y)\|=\|x\|_1+\|y\|_2$.

■ Espacio de Banach

⌖ Definición: $(L,\|\cdot\|)$ se define como *espacio completo* o *espacio de Banach* $\Leftrightarrow$ toda sucesión de Cauchy es convergente.

▶ En un espacio L de Banach, un subconjunto no vacío $S\subsetneq L$ es completo $\Leftrightarrow$ es cerrado.

▶ Todo espacio normado de dimensión finita sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $(L_n,\|\cdot\|)$, es de Banach. Es decir, en dimensión finita "todas las normas son equivalentes", generan la misma topología (teorema de Hausdorff-Tihonov).

▶ Dado un espacio de Banach $(L,\|\cdot\|)$, se define un *subespacio de Banach* del mismo como un subespacio normado completo $(M,\|\cdot\|)$, teniéndose que $M\lhd L$.

▶ Dado un espacio de Banach $(L,\|\cdot\|)$, $\forall M<L$ se tiene $M=\overline{M}$ $\Leftrightarrow$ $(M,\|\cdot\|)$ es subespacio de Banach.

▶ Dado un espacio de Banach L_1, entonces $L_1 \mp L_2$ $\Rightarrow$ L_2 es espacio de Banach.

■ Operadores lineales continuos

Aplicación continua

⊕ Definición: Dados dos espacios normados L_1 y L_2, una aplicación $T: D(T) \subset L_1 \to R(T) \subset L_2$ es *continua en* $x \in D(T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(x,\varepsilon) > 0 \ / \ \|T(x) - T(y)\|_2 < \varepsilon \ \forall \mathrm{y} \in \mathrm{D(T)} \ \textit{tal que} \ \|x - y\|_1 < \delta$

$\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset D(T)$ se tiene que $x_n \to x \ \Rightarrow \ \mathrm{T}(x_n) \to T(x)$.

⊕ Una aplicación $T: D(T) \subset L_1 \to R(T) \subset L_2$ es *continua* si lo es $\forall x \in D(T)$.

▶ Dado $(L, \|\cdot\|)$, las aplicaciones

$f_s : L \times L \to L \ / \ f_s(x,y) = x + y \ \forall x, y \in L$ y

$f_\pi : \mathbb{k} \times L \to L \ / \ f_\pi(\alpha, x) = \alpha x \ \forall \alpha \in \mathbb{k} \ \forall \mathrm{x} \in L$

son continuas, o sea,

$\forall (x_n, y_n) \to (x,y), \ \textit{esto es}, \ \forall x_n \to x \ \textit{y} \ \forall y_n \to y \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f_s(x_n, y_n) = f_s(x,y) = x + y$

$\forall (\alpha_n, x_n) \to (\alpha, x), \ \textit{esto es}, \ \forall \alpha_n \to \alpha \ \textit{y} \ \forall x_n \to x \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f_\pi(\alpha_n, x_n) = f_\pi(\alpha, x) = \alpha x,$

lo que equivale a afirmar que $(L, \|\cdot\|)$ es espacio lineal métrico (L, d) con $d(x,y) = \|x - y\| \ \forall x, y \in L$.

⊕ Definición: Una aplicación $T: D(T) \subset L_1 \to R(T) \subset L_2$ es *uniformemente continua* (ien $D(T)$!) $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \|T(x) - T(y)\|_2 < \varepsilon \ \forall x \in D(T) \ \forall \mathrm{y} \in \mathrm{D(T)} \ \textit{tal que} \ \|x - y\|_1 < \delta$.

▶ Una aplicación uniformemente continua es continua.

▶ La aplicación $\|\cdot\| \ : L \to \mathbb{R}$ es **no lineal** y uniformemente continua.

Operador lineal continuo/acotado

⊕ Definición: Dados dos espacios normados L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, un operador **lineal** $A: D(A) < L_1 \to R(A) < L_2$ es *acotado*

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ \textit{finito}, \ k > 0 \ / \ \|Ax\|_2 \le k \|x\|_1 \ \forall x \in D(A)$.

-Nota: Obsérvese que $K_{\min} = \sup_{x \in D(A), x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$ es el menor valor de k para el que se verifica la anterior desigualdad para el operador lineal acotado A.

⊕ ▶ Dados dos espacios normados L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, un operador **lineal** $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$ es *continuo* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ es continuo en un (cualquiera) punto de su dominio

$\Leftrightarrow$ es continuo en $x = 0$

$\Leftrightarrow$ es acotado.

▶ La suma, el producto por un escalar y la composición de operadores lineales continuos dan como resultado otro operador lineal continuo.
▶ Sea $T \in \mathcal{L}(D(T) < L_1, L_2)$ un operador lineal entre dos espacios normados, entonces el operador lineal T^{-1} existe y es acotado en su dominio si y solamente si existe una constante $m > 0$ tal que
$\|T(x)\|_2 \geq m\|x\|_1$, $\forall x \in D(T)$.

▶ $\mathcal{A}(L_1, L_2) = \mathcal{L}_C(L_1, L_2) \neq \mathcal{L}(L_1, L_2)$.
▶ $\mathcal{A}(L_n, L) = \mathcal{L}_C(L_n, L) = \mathcal{L}(L_n, L)$.

Norma de un operador lineal acotado

⌖ Definición: Dados dos espacios normados L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$ y un operador **lineal acotado** $A : D(A) < L_1 \to R(A) < L_2$, se define la *norma del operador*, $\|A\|$, según

$\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(A)}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$ (expresión que efectivamente define una norma sobre $\mathcal{A}(L_1, L_2)$).

▶ $\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 \quad \forall x \in D(A)$.

▶ Teorema: Definiciones equivalentes para la norma de un operador (¡lineal acotado!):
a) $\|A\| = \inf \left\{ k \in \mathbb{R},\ k \geq 0 \quad / \quad \|Ax\|_2 \leq k\|x\|_1 \quad \forall x \in D(A) \right\}$

b) $\sup\limits_{\substack{0 < \|x\|_1 \leq 1 \\ x \in D(A)}} \|Ax\|_2$ c) $\sup\limits_{\substack{\|x\|_1 \leq 1 \\ x \in D(A),\, x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$ d) $\sup\limits_{\substack{\|x\|_1 = 1 \\ x \in D(A)}} \|Ax\|_2$.

▶ $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ es un espacio lineal normado (cuerpo $\mathbb{k}$).

▶ En $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ la suma (de elementos de $\mathcal{A}$, esto es, de operadores lineales acotados), el producto por un escalar y el producto de operadores son también elementos del espacio (o sea, operadores lineales continuos).
-Por ejemplo:
$A_n \to A,\ B_n \to B,\ \alpha_n \to \alpha \ \Rightarrow\ A_n + B_n \to A + B,\ \alpha_n A_n \to \alpha A,\ A_n B_n \to AB$.
▶ Dados $A_1 \in \mathcal{A}(L_1, L_2)$ y $A_2 \in \mathcal{A}(L_2, L_3)$, entonces $\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|$.
Nota: esta propiedad permite que $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H, H)$, $H \equiv$ espacio de Hilbert - y, por tanto, espacio completo-, constituya un álgebra, que además es completa o de Banach.

▶ $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ con L_2 espacio de Banach es un espacio de Banach.
-Nota:
a) $\mathcal{L}(L) \equiv \mathcal{L}(L, L)$ posee estructura de *álgebra con elemento unidad*.
b) $(\mathcal{A}(L), \|\cdot\|)$ constituye un *álgebra normada*.
b) $(\mathcal{A}(L), \|\cdot\|)$, L espacio de Banach, constituye un *álgebra de Banach*.

Espacio dual

Dado un espacio normado $(L,\|\cdot\|)$, se define su *espacio dual* L^* como el espacio de Banach $(\mathcal{A}(L,\mathbb{k}),\|\cdot\|)$ (cuyos elementos son funcionales lineales acotados $t:L\to\mathbb{k}$ y que coincide con el dual algebraico en dimensión finita).

Compleción

Definición: Dado $(L,\|\cdot\|)$ espacio normado no completo, se define una *compleción* del mismo como un espacio $(L^{>},\|\cdot\|_{>})$ tal que:

a) $(L^{>},\|\cdot\|_{>})$ es espacio completo, esto es, de Banach.

b) Contiene un subconjunto L_0 denso en $L^{>}$, esto es, $\overline{L}_0 = L^{>}$.

c) $(L_0,\|\cdot\|_{>})$ es isomorfo en norma con $(L,\|\cdot\|)$, $L_0 \simeq L$.

► Todo espacio lineal normado admite una compleción, única salvo isomorfismos en norma.

Series y expansiones

Definición: Sea un espacio normado $(L,\|\cdot\|)$ y sea una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de L. Se define una *serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ como el par ordenado de sucesiones $(\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{s_n=\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}_{n=1}^{\infty})$, denominándose s_n como la *suma parcial de orden n-ésimo*.

-Notación: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$; $x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$; $x_1+x_2+\cdots$; $\sum_n x_n$.

Definición: $\sum_n x_n$ es *convergente con suma* $x \Leftrightarrow (\exists x\in L\ /\ s_n\to x)$ $\Leftrightarrow \|s_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

-Notación: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Definición: $\sum_n x_n$ es *divergente* $\Leftrightarrow \nexists x\in L\ /\ \sum_n x_n = x$.

Definición: $\sum_n x_n$ es una *serie finita* $\Leftrightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}\ /\ x_n = 0\ \forall n>n_0$.

► Si una serie es finita, entonces su suma es $\sum_n x_n = x_1+x_2+\cdots+x_{n_0}$.

► $\sum_n x_n = x \Rightarrow \sum_n \alpha x_n = \alpha x\quad \forall\alpha\in\mathbb{k}$

► $\sum_n x_n = x,\ \sum_n y_n = y \Rightarrow \sum_n (x_n+y_n) = x+y$

Definición: $\sum_n x_n$ satisface la *condición de Cauchy*

$\Leftrightarrow \|x_{n+1}+\cdots+x_{n+k}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall k=1,2,\ldots$

- $\sum_n x_n$ convergente $\Rightarrow \sum_n x_n$ satisface la condición de Cauchy.
- $\sum_n x_n$ convergente $\Rightarrow \|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

- L Banach, $\sum_n x_n$ convergente $\Leftrightarrow \sum_n x_n$ satisface la condición de Cauchy.

Definición: $\sum_n x_n$ es *absolutamente convergente* $\Leftrightarrow \sum_n \|x_n\|$ es convergente.

- En un Banach, toda serie reordenada de una serie absolutamente convergente, es también absolutamente convergente y con la misma suma.

- En un Banach, toda serie absolutamente convergente es convergente.

- Dos teoremas para series en $\mathbb{k}$ (o sea, de escalares):

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\sum_n \alpha_n$ es convergente $\Leftrightarrow$ la sucesión de las sumas parciales $\left\{ s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente, esto es, $\exists C \geq 0 \ / \ |s_n| \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$. Además, si la serie converge a α, $\sum_n \alpha_n = \alpha$, entonces $\alpha \leq C$.
- *Criterio de Cauchy*: $\sum_n \alpha_n$ es convergente $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ / \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k \right| < \varepsilon \ \ \forall m=1,2,\ldots, \forall n > n_0 \quad \left(\stackrel{m=1}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0 \right).$$

Expansiones

Definición: Dado un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$ y un subconjunto $S \subset L$, se dice que S *expande* $L \Leftrightarrow L = \overline{[S]}$ (esto es, $[S]$ es denso en L) (análoga definición para $M \lhd L$).

- Dados $(L, \|\cdot\|)$ y $S = \{x_n\}_{n\in I} \subset L$ tal que $card\ S = card\ I \leq \aleph_0$, S expande L $\Leftrightarrow \forall x \in L \ / \ x = \sum_{n\in I} \alpha_n x_n$, $\alpha_n \in \mathbb{k}$, $x_n \in S \ \forall n \in I$ (análogamente para $M \lhd L$).

- S expande $\overline{[S]} \lhd L$.

Ejemplos de espacios normados

- $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_p)$, donde $x \doteq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, es espacio Banach separable (y euclídeo $\Leftrightarrow$ $p = 2$) .

- $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$, donde $x \doteq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in I = \{1, \ldots, n\}$ y $\|x\|_\infty = \sup_{k \in I} |\alpha_k|$, es espacio Banach.

- $l_{\mathbb{k}}^p \equiv (l_{\mathbb{k}}^p, \|\cdot\|_p)$, donde $l_{\mathbb{k}}^p \subsetneq \mathbb{k}^\infty$, es el subconjunto de las sucesiones $p-$sumables, esto es, de las sucesiones $x \doteq \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in I = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}, card\ I = \aleph_0$, tales que $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$, $l_{\mathbb{k}}^\infty < \mathbb{k}^\infty$, con $\|x\|_p = \left(\sum_{i \in I} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, es espacio Banach separable (y euclídeo $\Leftrightarrow$ $p = 2$).

- $l_{\mathbb{k}}^\infty \equiv (l_{\mathbb{k}}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, donde $l_{\mathbb{k}}^\infty \subsetneq \mathbb{k}^\infty$, es el subconjunto de las sucesiones $x \doteq \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in I = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}, card\ I = \aleph_0$ ($I \equiv \mathbb{N}$), tales que $\sup_{i \in I} |\alpha_i| < \infty$, $l_{\mathbb{k}}^\infty < \mathbb{k}^\infty$, con $\|x\|_\infty = \sup_{i \in I} |\alpha_i|$, es espacio Banach.

- $C_{\mathbb{k}}^0 \equiv (C_{\mathbb{k}}^0, \|\cdot\|_\infty)$, donde $C_{\mathbb{k}}^0 \subsetneq \mathbb{k}^\infty$ es el subconjunto de las sucesiones $x \doteq \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, tales que $\lim_{n \to \infty} |\alpha_n| = 0$, $C_{\mathbb{k}}^0 < \mathbb{k}^\infty$, con $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$, es espacio Banach.

- $C_{\mathbb{k}}^p([a,b]) \equiv (C_{\mathbb{k}}[a,b], \|\cdot\|_p)$, donde $C_{\mathbb{k}}[a,b]$ es el conjunto de las funciones continuas definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y con recorrido en $\mathbb{k}$, y $\|f\|_p = \left| \int_a^b |f(x)|^p\, dx \right|^{\frac{1}{p}}$, $f \in C_{\mathbb{k}}[a,b]$, $1 \leq p < \infty$, es espacio normado (y euclídeo $\Leftrightarrow$ $p = 2$) .

- $C_{\mathbb{k}}^\infty \equiv (C_{\mathbb{k}}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, donde $C_{\mathbb{k}}[a,b]$ es el conjunto de las funciones continuas definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y con recorrido en $\mathbb{k}$, y $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, $f \in C_{\mathbb{k}}[a,b]$, es espacio de Banach.

▶ $L^p_{\mathbb{k}}(\mathbb{R}) \equiv (L^p_{\mathbb{k}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ donde $L^p_{\mathbb{k}}(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones (en realidad, clases de equivalencia de funciones) $p-$integrables Lebesgue definidas sobre la recta real $\mathbb{R}$ y con recorrido en $\mathbb{k}$, esto es, tales que

$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty$ (integral de Lebesgue), y definiendo

$\|f\|_p = \left| \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right|^{\frac{1}{p}}$, $f \in L^p_{\mathbb{k}}$, $1 \le p < \infty$, es espacio Banach (y euclídeo separable $\Leftrightarrow$ $p = 2$) .

● Lo mismo para cualquier *boreliano* $B \subset \mathbb{R}$ sustituyendo a $\mathbb{R}$ en la anterior ecuación.

● $L^p_{\mathbb{k}}([a,b])$ es la compleción de $C^p_{\mathbb{k}}([a,b])$, $1 \le p < \infty$.

■ Desigualdad de Hölder

▶ En $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_p)$, sean

$x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in I = \{1, \ldots, n\}$,

$y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in I = \{1, \ldots, n\}$,

$z = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)$,

$p \in \mathbb{R}$, $1<p<\infty$, $q \in \mathbb{R}$, $1<q<\infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Entonces $\Rightarrow$ $\|z\|_1 \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$ $\equiv$ $\sum_1^n |\alpha_i\beta_i| \le \left(\sum_1^n |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^n |\beta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

▶ En $l^p_{\mathbb{k}} \equiv (l^p_{\mathbb{k}}, \|\cdot\|_p)$, sean

$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in \mathbb{N}$,

$y = (\beta_1, \beta_2 \ldots)$, $\beta_i \in \mathbb{k}$ $\forall i \in \mathbb{N}$,

$z = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots)$,

$p \in \mathbb{R}$, $1<p<\infty$, $q \in \mathbb{R}$, $1<q<\infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Entonces $\Rightarrow$ $\|z\|_1 \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$ $\equiv$ $\sum_1^\infty |\alpha_i\beta_i| \le \left(\sum_1^\infty |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^\infty |\beta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

▶ En $C^p_{\mathbb{k}}([a,b]) \equiv (C_{\mathbb{k}}[a,b], \|\cdot\|_p)$, sean $f, g \in C_{\mathbb{k}}[a,b]$ y $p \in \mathbb{R},\ 1 < p < \infty,\ q \in \mathbb{R},\ 1 < q < \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \|fg\|_1 \ \le\ \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ \equiv\ \int_a^b |fg|\, dx \ \le\ \left(\int_a^b |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} .$$

▶ Sean $f \in (\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}, \|\cdot\|_p)$ y $g \in (\mathrm{L}^q_{\mathbb{k}}, \|\cdot\|_q)$, $p \in \mathbb{R},\ 1 < p < \infty,\ q \in \mathbb{R},\ 1 < q < \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \|fg\|_1 \ \le\ \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ \equiv\ \int |fg|\, dx \ \le\ \left(\int |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

(para p=q=2 se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakovski).

■ Desigualdad de Minkowski

▶ En algunos espacios normados, la relación triangular se denomina *desigualdad de Minkowski*:

- $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_p)$: $$\left(\sum_1^n |\alpha_i + \beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_1^n |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_1^n |\beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty)$$

- $l^p_{\mathbb{k}} \equiv (l^p_{\mathbb{k}}, \|\cdot\|_p)$: $$\left(\sum_1^\infty |\alpha_i + \beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_1^\infty |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_1^\infty |\beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty)$$

- $(C_{\mathbb{k}}[a,b], \|\cdot\|_p)$: $$\left(\int_a^b |f+g|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty)$$

- $\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}} \equiv (\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}, \|\cdot\|_p)$: $$\left(\int |f+g|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty)$$

