MÉTODOS MATEMÁTICOS
ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Profesora: Mª Cruz Boscá

TEMA 2: ESPACIOS EUCLÍDEOS Y DE HILBERT

◆ Sea un espacio lineal $L \equiv$ (**X**, +, **·**) sobre el cuerpo $\mathbb{k}$.

■Producto interno o escalar y espacio pre-Hilbert

⌖ Definición: Una *producto escalar* o *interno* $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sobre L es una aplicación de $L \times L$ sobre $\mathbb{k}$, $\langle \cdot,\cdot \rangle : L \times L \to \mathbb{k}$, tal que satisface los axiomas:

Ax.1: $\langle x,x \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in L$

Ax.2: $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ax.3: $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle^* \ \ \forall x,y \in L$ (*hermiticidad*)

Ax.4: $\langle x,\alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle \ \ \forall \alpha \in \mathbb{k} \ \ \forall x,y \in L$ (*homogeneidad* a la derecha)

Ax.5: $\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle \ \ \forall x,y,z \in L$ (*distributividad* o *aditividad*)

-Nota: esta definición es la de una *forma sesquilineal hermítica*.

⌖ Definición: El par $(L,\langle \cdot,\cdot \rangle)$ define un *espacio pre-Hilbert* o *espacio euclídeo*.

► $(L,\langle \cdot,\cdot \rangle)$ es espacio normado, $(L,\|\cdot\|)$, con la norma derivada del producto escalar según $\|x\| = +\sqrt{\langle x,x \rangle} \ \ \forall x \in L$.

◆ Sea un espacio pre-Hilbert $L \equiv (L,\langle \cdot,\cdot \rangle)$ y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida:

Propiedades y definiciones

► $\langle x,\vec{0} \rangle = \langle \vec{0},x \rangle = 0 \ \ \forall x \in L$

► $\langle x,y \rangle = 0 \ \ \forall y \in L \ \Rightarrow \ x = \vec{0}$

► $\langle x,y \rangle = \langle z,y \rangle \ \ \forall y \in L \ \Rightarrow \ x = z$

► $\langle x,\alpha y+\beta z \rangle = \alpha \langle x,y \rangle + \beta \langle x,z \rangle$ y $\langle \alpha x+\beta y,z \rangle = \alpha^* \langle x,z \rangle + \beta^* \langle y,z \rangle \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{k} \ \forall x,y,z \in L$

▶ *Desigualdad de Schwarz-Cauchy-Buniakowskii*:

a) $\left|\langle x,y\rangle\right|^2 \le \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$ $\left(\left|\langle x,y\rangle\right| \le \|x\|\cdot\|y\|\right)$ $\forall x,y\in L$;

b) $\left|\langle x,y\rangle\right|^2 = \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \Leftrightarrow$ $y=\lambda x$ $\lambda\in\mathbb{k}$ $x,y\in L$.

⌖ *Ángulo entre dos vectores*: Si $\mathbb{k}=\mathbb{R}$, entonces el *ángulo* ϑ *entre dos vectores no nulos* de L se define según $\cos\vartheta = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$, $x, y\in L,\ x\neq 0,\ y\neq 0$.

▶ *Identidad de polarización:*

a) *Si* $\mathbb{k}=\mathbb{R}$, *entonces* $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$ $\forall x,y\in L$.

b) *Si* $\mathbb{k}=\mathbb{C}$, *entonces* $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\right]$ $\forall x,y\in L$.

▶ *Ley del paralelogramo:*

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ $\forall x,y\in L$.

-Nota: esta ley no se cumple en un espacio normado arbitrario; sí cuando la norma deriva de un producto escalar. Además, se tiene:

- Un espacio normado $(L,\|\cdot\|)$ es espacio pre-Hilbert $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\Leftrightarrow$ en él se satisface la ley del paralelogramo.
- Y, entonces, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ queda definido por la identidad de polarización. Y este producto interno induce la norma específica del espacio normado de partida: un espacio normado admite, en su caso, una única estructura euclídea.

- ⌖ Un *espacio euclídeo* es un espacio normado cuya norma satisface la ley del paralelogramo.

▶ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una función continua.

- Sean x_n e y_n dos sucesiones de Cauchy en $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle) \Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle$ es sucesión de Cauchy en $\mathbb{k}$.

⌖ Definición: Dos espacios pre-Hilbert $L_1 \equiv (L_1,\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $L_2 \equiv (L_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ son *isomorfos en producto escalar* $\Leftrightarrow \exists\, T: L_1 \to L_2$, aplicación lineal de L_1 en L_2, tal que:

a) T es un isomorfismo entre los espacios lineales.

b) T preserva el producto escalar: $\langle Tx,Ty\rangle_2 = \langle x,y\rangle_1$ $\forall x,y\in L_1$.

▶ Dos espacios euclídeos son isomorfos en producto escalar $\Leftrightarrow$ son isomorfos en norma.

-Notación: $L_1 \simeq L_2$.

▶ Todos los espacios euclídeos de igual dimensión finita n son isomorfos entre sí topológica y métricamente.

Sea un espacio pre-Hilbert $L \equiv (L, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ **y sea** $\|\cdot\|$ **la norma inducida:**

Ortogonalidad

Definición: Dado $(L, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, dos vectores x, y de L son *ortogonales* $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

-Notación: $x \perp y$

- $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$
- $\vec{0} \perp x \quad \forall x \in L$
- $x \perp x \Leftrightarrow x = \vec{0}$
- $x \perp y \Rightarrow \|x+y\| = \|x-y\|$

Definición: Un vector $x \in L$ es ortogonal a un subconjunto $S \subset L$ $\Leftrightarrow \; x \perp y \quad \forall y \in S$.

-Notación: $x \perp S$

Definición: Un conjunto $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $A \equiv$ conjunto indicial de cualquier cardinalidad, es *ortogonal*

$\Leftrightarrow x_\alpha \perp x_\beta \quad \forall \alpha, \beta \in A \;\; / \;\; \alpha \neq \beta \;\; \Leftrightarrow \;\; \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \|x_\alpha\|^2 \quad \forall \alpha, \beta \in A$.

Definición: Dos subconjuntos $S_1 \subset L$ y $S_2 \subset L$ son mutuamente ortogonales

$\Leftrightarrow \; x \perp y \quad \forall x \in S_1 \; \forall y \in S_2$.

-Notación: $S_1 \perp S_2$

- *Teorema de Pitágoras generalizado*:

Sea $\{x_n\}_{n \in I} \subset L$, $\text{card}\, I \leq \aleph_0$, un conjunto ortogonal tal que $\sum_{n \in I} x_n = x$.

Entonces,

$\Rightarrow \sum_{n \in I} \|x_n\|^2$ es convergente, con suma $\|x\|^2 = \left\| \sum_{n \in I} x_n \right\|^2 = \sum_{n \in I} \|x_n\|^2$.

- Dado $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L$, conjunto ortogonal, S es conjunto linealmente independiente $\Leftrightarrow \; \vec{0} \notin S$.

⊕ Definición: Sea un subconjunto $A \subset L,\ A \neq \varnothing$. Se define su *complemento ortogonal* $A^{\perp}$ como el subconjunto $A^{\perp} = \{x \in L\ /\ x \perp y\ \ \forall y \in A\} \subset L$.

- Dado $A \subset L,\ A \neq \varnothing \Rightarrow A^{\perp} \lhd L$.
- Dados $A \subset L,\ A \neq \varnothing\ \ y\ \ B \subset L,\ B \neq \varnothing \ \Rightarrow$
  - $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$
  - $A \subset A^{\perp\perp}$
  - $A \subset B \Rightarrow A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}$
  - $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$
  - $A \cap A^{\perp} = \varnothing \ \vee\ A \cap A^{\perp} = \{\vec{0}\}$
  - $x \in A \cap A^{\perp} \ \Rightarrow\ x = \vec{0}$
  - $\left(\overline{A}\right)^{\perp} = A^{\perp}$
  - $L^{\perp} = \{\vec{0}\}\ \ y\ \ \{\vec{0}\}^{\perp} = L$
  - $[A]^{\perp} = A^{\perp}$
  - Si A es denso en L, esto es, $\overline{A} = L$, entonces $\Rightarrow A^{\perp} = \{\vec{0}\}$

Proyectores ortogonales

⊕ Definición: Dados dos subespacios lineales $M_1 < L$ y $M_2 < L$ tales que $L = M_1 \oplus M_2$, un proyector de L sobre M_1 en la dirección de M_2, $P_{M_1}^{M_2} \equiv P_{M_1} : L \to M_1$, se dice que es un *proyector ortogonal* $\Leftrightarrow\ M_1 \perp M_2$.

- Dados un proyector ortogonal P y el operador identidad I en $L \Rightarrow$ el operador $I - P$ es proyector ortogonal con recorrido $R(I-P) = \ker P$ y núcleo $\ker\ (I-P) = R(P)$.

- Todo proyector ortogonal P_M es continuo y, sii $M \neq \{\vec{0}\}$, de norma unidad.
- Dado P proyector ortogonal en $L \ \Rightarrow$
  - $\ker P \lhd L$
  - $R(P) \lhd L$
  - $\ker P = (R(P))^{\perp}$
  - $R(P) = (\ker P)^{\perp}$

- Dados dos subespacios lineales $M < L$ y $N < L$ tales que $L = M \oplus N$ y $M \perp N$, entonces $\Rightarrow\ \exists!$ (existe un único) proyector ortogonal P con $R(P) = M$ y $\ker P = N = M^{\perp}$.

-Nota: Obsérvese que, dado un $M \lhd L$, no está garantizado que exista un proyector ortogonal $P_M^{M^{\perp}}$, o sea, no siempre se tendrá $L = M \oplus M^{\perp}$ (algo que sí ocurre cuando el espacio es completo, esto es, un Hilbert).

Conjuntos ortonormales

Definición: Un conjunto $S=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L$, $A\equiv$conjunto indicial de cualquier cardinalidad, es *ortonormal*
$\Leftrightarrow$ S es ortogonal y $\|x_\alpha\|=1\ \ \forall\alpha\in A\ \Leftrightarrow\ \langle x_\alpha,x_\beta\rangle=\delta_{\alpha,\beta}\ \ \forall\alpha,\beta\in A$.

- Dado $S=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L$, conjunto ortonormal $\Rightarrow$ S es conjunto linealmente independiente.

- Dado $S=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L$, conjunto ortonormal $\Rightarrow$ $\vec{0}\notin S$.

- Dado $S=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L$, conjunto ortogonal, $\vec{0}\notin S$, entonces $S_0=\left\{\dfrac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}_{\alpha\in A}$ es conjunto ortonormal $\Leftrightarrow$ S_0 es conjunto linealmente independiente.

- *Método de ortonormalización de Gram-Schmidt:*

Dado $S=\{x_n\}_{n\in I}\subset L$, $\operatorname{card} I\le\aleph_0$, conjunto linealmente independiente, entonces $\Rightarrow$ existe un conjunto ortonormal S_0 de la misma cardinalidad, construible según $S_0=\left\{u_n=\dfrac{y_n}{\|y_n\|}\right\}_{n\in I}\subset L$, donde

$y_1=x_1\ ;\ y_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}\langle u_k,x_n\rangle u_k\ ,\ \ n>1,\ n\in I$, y que es tal que $[S_0]=[S]$.

Definición: Dados un conjunto ortonormal $S=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L$ y un vector $x\in L$, se definen las *componentes de Fourier* del vector x respecto al conjunto ortonormal S como el conjunto de escalares $\langle x_\alpha,x\rangle\in\mathbb{k}$, $\alpha\in A$, notándose $C_F^{(x,S)}=\{\langle x_\alpha,x\rangle\}_{\alpha\in A}\subset\mathbb{k}$.

- Dado un espacio euclídeo L y un subconjunto ortonormal finito del mismo, $S=\{x_n\}_{n\in I}\subset L$, $\operatorname{card} I=m,\ m\in\mathbb{N}$ y finito, entonces $\Rightarrow$
  - a) $\forall y\in L\ /\ \|y\|^2=\sum_{n=1}^{m}\left|\langle x_n,y\rangle\right|^2+\left\|y-\sum_{n=1}^{m}\langle x_n,y\rangle x_n\right\|^2$, $x_n\in S\ \ \forall n\in I$
  - b) *Desigualdad de Bessel finita:* $\forall y\in L\ /\ \|y\|^2\ge\sum_{n=1}^{m}\left|\langle x_n,y\rangle\right|^2$, $x_n\in S\ \ \forall n\in I$

- Dado $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ y un subconjunto ortonormal a lo sumo numerable del mismo, $S=\{x_n\}_{n\in I}\subset L$, *card* $I\le\aleph_0$, entonces $\Rightarrow$:
  - a) *Desigualdad de Bessel:* $\forall y\in L\ /\ \|y\|^2\ge\sum_{n\in I}\left|\langle x_n,y\rangle\right|^2$, $x_n\in S\ \forall n\in I$
  - b) $\forall y\in L\ :\ \lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle=0,\ \ x_n\in S\ \ \forall n\in I$
  - c) $\forall\, y,z\in L\ /\ \sum_{n\in I}\left|\langle y,x_n\rangle\langle x_n,z\rangle\right|\le\|y\|\cdot\|z\|,\ \ x_n\in S\ \forall n\in I$.

-Nota: Obsérvese que el conjunto de escalares $\langle x_n, u\rangle \in \mathbb{k}$, n$\in I$, no son sino las componentes de Fourier del vector u respecto al conjunto ortonormal $S=\{x_n\}_{n\in I}\subset L$.

▶ Dados $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $S=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L$, conjunto ortonormal de L , y $C_F^{(x,S)}=\{\langle x_\alpha, x\rangle\}_{\alpha\in A}\subset\mathbb{k}$, conjunto de las componentes de Fourier de un vector $x\in L$ respecto a S , entonces $\Rightarrow$

- $S^{(x)}=\{x_\alpha\in S \;/\; \langle x_\alpha, x\rangle\neq 0\}_{\alpha\in A} = \{x_n\}_{n\in J}\subset S$ es numerable, esto es:
  card $S^{(x)}=$ card $\{x_\alpha\in S \;/\; \langle x_\alpha, x\rangle\neq 0\}_{\alpha\in A}=$ card $\{x_n\}_{n\in J}=$ card $J\;\leq\;\aleph_0$ y
  card $\mathrm{C}_{F\neq 0}^{(x,S)}=\{\langle x_\alpha, x\rangle\in C_F^{(x,S)} / \langle x_\alpha, x\rangle\neq 0\}_{\alpha\in A}\;\leq\;\aleph_0$; $\mathrm{C}_{F\neq 0}^{(x,S)}\subset C_F^{(x,S)}\subset\mathbb{k}$.
- $\forall y\in L \;/\; \|y\|^2\geq\sum_{n\in J}|\langle x_n, y\rangle|^2,\; \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle=0,\;\; x_n\in S^{(x)}\;\forall n\in J$
- (para $y=x$) $\|x\|^2\geq\sum_{n\in J}|\langle x_n, x\rangle|^2,\;\; \lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle=0,\;\; x_n\in S^{(x)}\;\forall n\in J$
- $\forall\, y,z\in L \;/\; \|y\|\cdot\|z\|\geq\sum_{n\in J}|\langle y, x_n\rangle\langle x_n, z\rangle|$, $x_n\in S^{(x)}\;\forall n\in J$
- (para $y=x$) $\forall$ z$\in L$ / $\|x\|\cdot\|z\|\geq\sum_{n\in J}|\langle x, x_n\rangle\langle x_n, z\rangle|$, $x_n\in S^{(x)}\;\forall n\in J$.

▶ Dados $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $S=\{x_n\}_{n\in I}\subset L,$ $card\; S\;\leq\;\aleph_0$, conjunto ortonormal de L a lo sumo numerable, y $C=\{\lambda_n\}_{n\in I}\subset\mathbb{k}$, conjunto de escalares de igual cardinalidad que S , entonces, **si** $\exists y\in L \;/\; \sum_{n\in I}\lambda_n x_n=y$ (esto es, **si la serie converge** en L con suma y) $\Rightarrow$

- a) $\lambda_n=\langle x_n, y\rangle\;\forall n\in I$
- b) $\|y\|^2=\sum_{n\in I}|\lambda_n|^2=\sum_{n\in I}|\langle x_n, y\rangle|^2$ (*Identidad de Parseval*)

-Nota 1: Obsérvese que, en general, $\sum_{n\in I}|\lambda_n|^2$ *convergente* $\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ $\sum_{n\in I}\lambda_n x_n$ *convergente*; además, y aun aunque $\{\lambda_n=\langle x_n, x\rangle\}\equiv C_{F\neq 0}^{(x,S)}$ y $\sum_{n\in I}\lambda_n x_n=\sum_{n\in I}\langle x_n, x\rangle x_n$ fuera convergente, su suma podría ser $y\in L$, $y=\sum_{n\in I}\lambda_n x_n=\sum_{n\in I}\langle x_n, x\rangle x_n\neq x$, teniéndose entonces, según la identidad de Parseval y la desigualdad de Bessel, que, dado $\sum_{n\in I}\lambda_n x_n=y$, entonces $\Rightarrow\|y\|^2=\sum_{n\in I}|\langle x_n, y\rangle|^2=\sum_{n\in I}|\lambda_n|^2=\sum_{n\in I}|\langle x_n, x\rangle|^2\;\leq\;\|x\|^2$, con $\langle x_n, x\rangle=\langle x_n, y\rangle=\lambda_n\;\;\forall n\in I$.

-Nota 2: En particular, en espacios euclídeos completos (hilbertianos), sí se tiene la doble implicación $\sum_{n\in I}|\lambda_n|^2$ *convergente* $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\sum_{n\in I}\lambda_n x_n$ *convergente* ; además, si S no es un conjunto ortonormal numerable cualquiera, sino una *base ortonormal* numerable, entonces se tendrá garantizado $y=x$ en las fórmulas de la anterior nota 1, esto es, $\sum_{n\in I}\langle x_n, x\rangle x_n=x$, $\sum_{n\in I}|\langle x_n, x\rangle|^2=\|x\|^2$.

Bases ortonormales

⌖ Definición: Una *base ortonormal* de L es un conjunto $B \subset L$ ortonormal maximal (esto es, $B \subset L$ es conjunto ortonormal y $\nexists S \subset L$ conjunto ortonormal / $B \subsetneq S$).

▶ Todo conjunto ortonormal puede ampliarse a base ortonormal.

- Todo espacio euclídeo $L \equiv (L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $L \neq \{\vec{0}\}$, posee al menos una base ortonormal.

⌖ Definición: Un conjunto ortonormal $S \subset L$ es un *conjunto total* $\Leftrightarrow$ $S^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

▶ Un conjunto $B \subset L$ es base ortonormal de $L \Leftrightarrow B$ es un conjunto total.

▶ Todas las bases ortonormales de un espacio pre-Hilbert o euclídeo tienen la misma cardinalidad.

⌖ Definición: La *dimensión ortogonal* o *hilbertiana* de un espacio euclídeo se define como el cardinal de sus bases ortonormales: $\dim_H L = \operatorname{card} B$, $B \equiv$ base ortonormal de L.

⌖ Por convenio, si $L = \{\vec{0}\}$, entonces $\dim_H L = 0$.

▶ Dado $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\dim L \leq \aleph_0$ (dimensión lineal) $\Rightarrow$

- a) Dado $S = \{x_n\}_{n \in I} \subset L$, $\operatorname{card} I = \dim L$, base de Hamel de L, el conjunto $S_0 = \{u_n\}_{n \in I} \subset L$, obtenido a partir del S mediante el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, es b.o.n. de L.

- b) Toda base ortonormal es base de Hamel.

- c) $\exists$ una base ortonormal numerable ($\equiv$b.o.n), $B = \{e_n\}_{n \in I}$, con $\operatorname{card} B = \operatorname{card} I \leq \aleph_0$, tal que $\forall x \in L \;\; \exists m(x) \in N$, m *finito* / $x = \sum_{n=1}^{m} \langle e_n, x \rangle \, e_n$, donde $\{\langle e_n, x \rangle\}_{n=1}^{m}$ son las componentes de Fourier del vector x respecto a la base B.

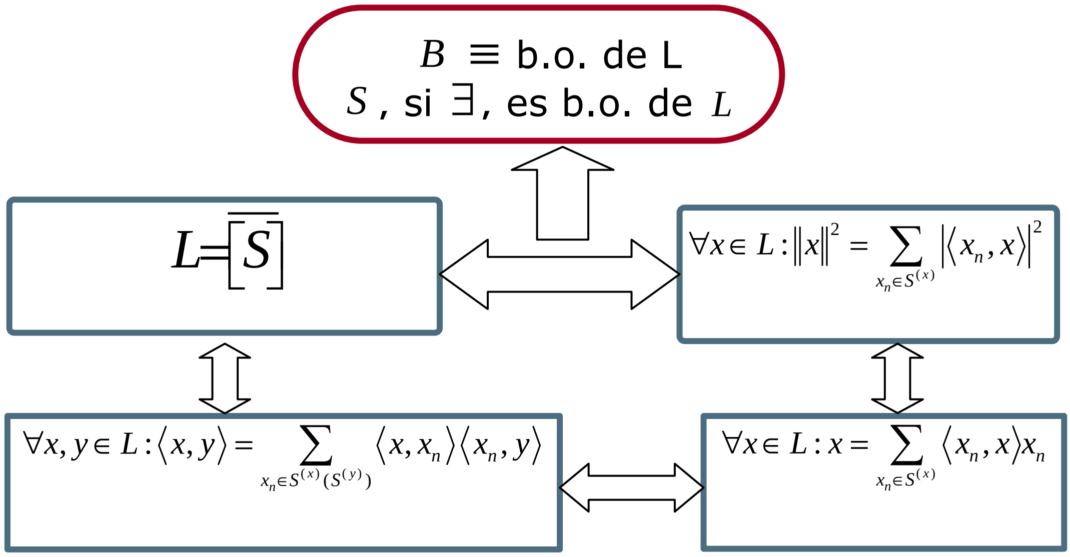
- d) $\dim_H L = \dim L$.

-Notas:
1) Si L es completo (cualquier dimensión) $\Rightarrow$ $\dim L \geq \dim_H L$.
2) $\nexists$ L completo (Banach) con $\dim L = \aleph_0$.
3) En general, puede ser $\dim L > \dim_H L$ (i.e.: lo es para L completo con $\dim_H L \geq \aleph_0$).

Interrelaciones en un euclídeo

► En un $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, espacio euclídeo general, se tiene:

● $L \neq \{\vec{0}\}$ **espacio euclídeo** $\Rightarrow$ $\exists$ **un B base ortonormal de** L**, y puede** $\exists$ **un** $S \subset L$**, conjunto ortonormal (si** $\exists$**, es también base ortonormal) para el que se cumplen las siguientes propiedades e interrelaciones:**



$\perp$

-Nota: En todas las series que aparecen se cumplen los requisitos que garantizan que la convergencia de las mismas, y en su caso el valor de la suma, no se ven afectados por reordenaciones.

-Nota sobre **terminología**:

● Algunos autores definen, alternativamente:

1) Un conjunto *ortonormal completo* como aquél S tal que $S^{\perp} = \{\vec{0}\}$ (aquí: cuando $S^{\perp} = \{\vec{0}\}$, entonces S es un conjunto *ortonormal total*).

2) Una *base ortonormal* como un conjunto ortonormal tal que $L = \overline{[S]}$ (aquí: lo primero, un conjunto ortonormal maximal; lo segundo, un conjunto S que expande L).

3) Un conjunto *ortonormal cerrado* S como aquél tal que $L = \overline{[S]}$.

-Nota sobre **convergencia de las series**:

● En todas las series que aparecen en espacios normados y euclídeos, se satisfacen siempre, en cada caso, las condiciones que garantizan que ni la convergencia ni el valor de la suma quedan afectados por reordenaciones de términos en la serie.

Espacio euclídeo separable

Definición: $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es *separable* $\Leftrightarrow$ existe un subconjunto no vacío a lo sumo numerable denso en L:

L es separable $\Leftrightarrow$ $\exists D\subset L$, $D\neq\varnothing$, $\text{card } D \leq \aleph_0$ / $\overline{D}=L$.

- Dados $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ separable y $S\subset L$ conjunto ortogonal (u ortonormal) $\Rightarrow$ S es a lo sumo numerable: $\text{card } S \leq \aleph_0$.
  - Dado $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ separable $\Rightarrow$ $\dim_H L \leq \aleph_0$.

- La separabilidad es un invariante topológico.

Interrelaciones en un euclídeo separable

- En un $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euclídeo separable (no necesariamente completo) se tiene:

- $L\neq\{\vec{0}\}$ **espacio euclídeo separable** $\Leftrightarrow$ $\exists$ **un** $S_{\aleph_0}\subset L$**, conjunto ortonormal a lo sumo numerable (**$card\ S_{\aleph_0} \leq \aleph_0$**) /** $L=\overline{[S]}$ **.**

- **Interrelaciones:**

$$
\begin{tikzcd}
 & S_{\aleph_0} \equiv B \text{ es b.o.n. de } L & \\
L=\overline{[S_{\aleph_0}]} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & {} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \forall x\in L: \|x\|^2=\sum_{x_n}|\langle x_n,x\rangle|^2 \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\forall x,y\in L: \langle x,y\rangle=\sum_{x_n}\langle x,x_n\rangle\langle x_n,y\rangle \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \forall x\in L: x=\sum_{x_n}\langle x_n,x\rangle x_n
\end{tikzcd}
$$

◈ Sea un espacio lineal $L \equiv (\mathbf{X}, +, \cdot)$ sobre el cuerpo $\Bbbk$.

■ Espacio de Hilbert

⌖ Definición: Dado un espacio euclídeo o pre-hilbertiano $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, constituye un espacio de Hilbert $\Leftrightarrow$ es completo respecto de la topología inducida por el producto escalar $\Leftrightarrow$ toda sucesión de Cauchy es convergente.

-Nota: algunos autores definen un Hilbert requiriendo, además, la separabilidad del espacio; otros, también, una dimensión lineal no finita.

▶ $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es espacio de Hilbert $\Leftrightarrow$ $(L,\|\cdot\|)$, con la norma derivada del producto escalar según $\|x\| = +\sqrt{\langle x,x\rangle}$ $\forall x\in L$, es espacio de Banach.

Compleción

⌖ Definición: Dado $L=(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclídeo no completo, se define una *compleción* del mismo como un espacio $L^{>} \equiv (L^{>},\langle\cdot,\cdot\rangle_{>})$ tal que:

a) $L^{>}$ es espacio completo, esto es, hilbertiano.

b) Contiene un subconjunto L_0 denso en $L^{>}$, esto es, $\overline{L_0} = L^{>}$.

c) $(L_0,\langle\cdot,\cdot\rangle_{>})$ es isomorfo en producto escalar con $(L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $L_0 \simeq L$.

▶ Todo espacio euclídeo admite una compleción, única salvo isomorfismos en producto escalar.

Ejemplos

▶ $(\Bbbk^n,\|\cdot\|_2)$, donde $x \doteq (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i \in \Bbbk$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ y $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, es espacio Hilbert (separable).

▶ $l^2_{\Bbbk} \equiv (l^2_{\Bbbk},\|\cdot\|_2)$, donde $l^p_{\Bbbk} \subsetneq \Bbbk^\infty$, es el subconjunto de las sucesiones de cuadrado sumable, esto es, de las sucesiones $x \doteq \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\dots)$, $\alpha_i \in \Bbbk$ $\forall i\in I=\{1,2,\dots,n,\dots\}, card\ I = \aleph_0$, tales que $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2 < \infty$, $l^\infty_{\Bbbk} < \Bbbk^\infty$, con $\|x\|_2 = \left(\sum_{i\in I}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, es espacio Hilbert (separable).

◈ Sea un espacio de Hilbert $H \equiv (L,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida:

Subespacio de Hilbert

► Dado $M \lhd H \Rightarrow \ (M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es espacio de Hilbert

-Observación: Dados H y $M \subset H, M < H$, no siempre $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

⊕ Definición: Dado H, sea un $M \subset H, M < H$, tal que $M = \overline{M}$, entonces el espacio de Hilbert $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ constituye un *subespacio de Hilbert*, o *subespacio hilbertiano,* $M \lhd H$, del H original.

Propiedades

► $A \subsetneq H$, $A \neq \varnothing$ es cerrado $\Leftrightarrow$ $A \subsetneq H$, $A \neq \varnothing$ es completo.

► Dado H, $A < H \Rightarrow \overline{A} \lhd H \Rightarrow (\overline{A},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es (sub)espacio de Hilbert.

► Dado H, $M < H$ / $\dim M = n$ (finita) $\Rightarrow M \lhd H \Rightarrow (M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es (sub)espacio de Hilbert.

► Dado H, $M < H$ / $\dim M = n$ (finita) $\Rightarrow M = \overline{M}$.

► Dado $A \subset H$, $A \neq \varnothing \Rightarrow A^{\perp} \lhd H$.

Conjuntos ortonormales en un Hilbert

▶ Dados $S=\{x_n\}_{n\in I}\subset H$, $\operatorname{card} I \leq \aleph_0$, conjunto ortonormal a lo sumo numerable en H:

- Dado $C=\{\lambda_n\}_{n\in I}\subset \mathbb{k}$, conjunto de escalares de igual cardinalidad que S, entonces:

a) $\sum_{n\in I}|\lambda_n|^2$ *convergente* $\overset{(\Leftarrow\, en\, L,H)}{\underset{(\Rightarrow\, en\, H)}{\Leftrightarrow}}$ $\sum_{n\in I}\lambda_n x_n$ *convergente*

b) Dado $\sum_{n\in I}|\lambda_n|^2 = \lambda \;\Rightarrow\; \exists y\in H \;\;/\;\; \sum_{n\in I}\lambda_n x_n = y$, entonces $\Rightarrow$

$$\langle x_n, y\rangle = \lambda_n \;\; \forall n\in I \;\; ; \;\; \|y\|^2 = \sum_{n\in I}|\lambda_n|^2 = \lambda = \sum_{n\in I}|\langle x_n, y\rangle|^2 \;\; \text{(identidad de Parseval)}$$

- $\forall x\in H$ se tiene $\sum_{n\in I}\langle x_n, x\rangle\, x_n = y$, con $y\in H$ tal que:

  a) $\langle x_n, x\rangle = \langle x_n, y\rangle \;\; \forall n\in I$, $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle = 0$.

  b) $\|y\|^2 = \sum_{n\in I}|\langle x_n, y\rangle|^2 = \sum_{n\in I}|\langle x_n, x\rangle|^2 \;\leq\; \|x\|^2$

  (a partir de la desigualdad de Bessel)

Teorema de Riesz-Fisher

▶ *Teorema de Riesz-Fisher ("las bases ortonormales de H expanden H"):* Dado el conjunto ortonormal $B=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset H$, B es base ortonormal de H $\Rightarrow$ $\overline{[B]} = H$, esto es, B expande H .

▶ (*Riesz-Fisher* 2) "$\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b]) \equiv (\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b]), \|\cdot\|_p)$, $p\geq 1$, es completo" (tema 3).

- Nota: Por tanto, en un espacio de Hilbert todos las proposiciones en el diagrama correspondiente (comparar páginas 8 y 13) están interconectadas por $\Leftrightarrow$, y todas las bases ortonormales B en el espacio las satisfacen.

▶ *Teorema:* B c. ortonormal de H es base ortonormal de H $\Leftrightarrow$ $\overline{[B]} = H$.

Relaciones entre dimensiones

▶ Dado $B=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset H$, $\operatorname{card} A \geq \aleph_0$, base ortonormal no finita en H $\Rightarrow$ B no es base lineal de H .

- Dado H / $\dim_H H \geq \aleph_0 \;\Rightarrow\; \dim H > \dim_H H$.
- Dado H, $\dim_H H = \aleph_0$ (H separable con dimensión no finita) $\Rightarrow$ $\dim H > \aleph_0$.

▶ $\nexists H$ / $\dim H = \aleph_0$

Isomorfismos

▶ Dados dos espacios de Hilbert H_1 y H_2, $\dim_H H_1 = \dim_H H_2 \iff$ H_1 y H_2 son isomorfos en producto escalar.

- Para cada cardinal $\exists$, en su caso, un único espacio de Hilbert (o sea: puede existir o no, pero si existe, es único, salvo isomorfismos isométricos).

Interrelaciones en un Hilbert

▶ En un $H \equiv (L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, espacio de Hilbert (no necesariamente separable), se tiene:

- $H \neq \{\vec{0}\}$ **espacio de Hilbert** $\Rightarrow$ $\forall$ $B \subset H$, **base ortonormal de H (y** $\exists$ **al menos una), se cumplen las siguientes propiedades e interrelaciones:**

$$\begin{tikzcd}
 & B \text{ es b.o. de } H \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
H = \overline{[B]} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & & \forall x \in H : \|x\|^2 = \sum\limits_{x_n \in B^{(x)}} \left|\langle x_n, x \rangle\right|^2 \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \sum\limits_{x_n \in B^{(x)} (B^{(y)})} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, y \rangle \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \forall x \in H : x = \sum\limits_{x_n \in B^{(x)}} \langle x_n, x \rangle x_n
\end{tikzcd}$$

Espacio de Hilbert separable

- Caracterización: Un espacio de Hilbert $H \neq \{\vec{0}\}$ es separable $\Leftrightarrow$ existe una base ortonormal a lo sumo numerable del mismo.

-Nota: recordar la definición: H es *separable* $\Leftrightarrow \exists\, D \subset H,\ D \neq \emptyset,\ card\ D\ \leq\ \aleph_0\ /\ \overline{D} = H$.

- La separabilidad es un invariante topológico.

- Todo espacio de Hilbert separable con dimensión hilbertiana infinita es isomorfo isométricamente con el espacio de Hilbert $l^2_{\mathbb{k}}$.

- Dado H espacio de Hilbert separable, $M \lhd H \Rightarrow (M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es espacio de Hilbert separable.

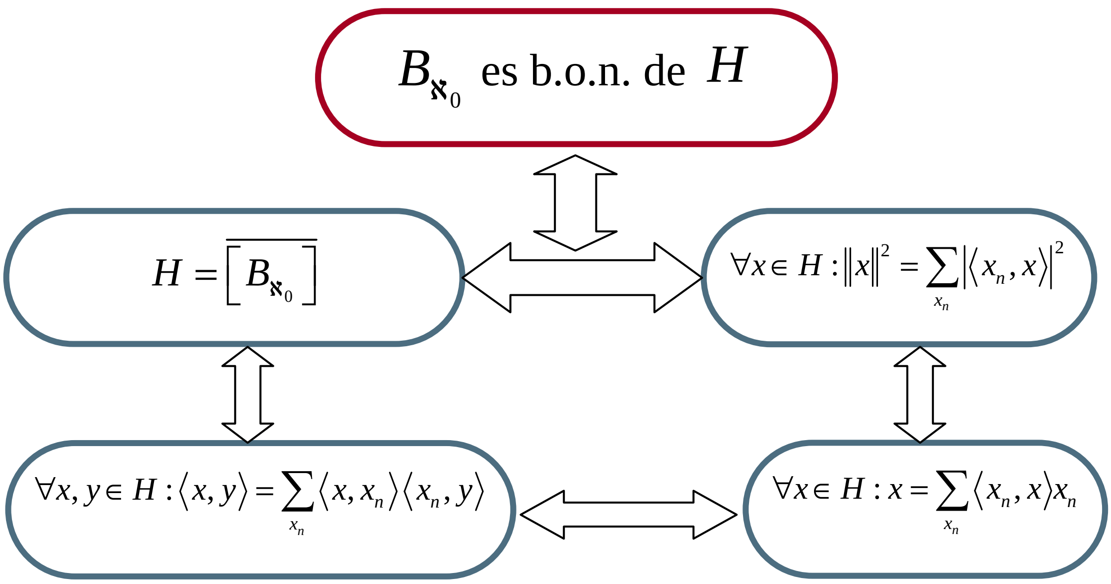
-Nota: En general, dado (X, d) separable $\Rightarrow$ todo $A \subset X$ es separable.

- ***Postulado I de la Mecánica Cuántica***: A cada sistema físico que se pretenda describir en el marco de la MC, se le hace corresponder un espacio de Hilbert H complejo ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$) y separable.

Interrelaciones en un Hilbert separable

- En un $H \equiv (L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, espacio de Hilbert separable, se tiene:

- $H \neq \{\vec{0}\}$ **espacio de Hilbert separable** $\Rightarrow$ $\forall$ $B_{\aleph_0} \subset H$, **base ortonormal (y** $\exists$ **al menos una, y toda base de** H **ha de ser finita o a lo sumo inf. numerable: b.o.n., con** $card\ B_{\aleph_0}\ \leq\ \aleph_0$**), se cumplen las siguientes propiedades e interrelaciones:**



Teorema de proyección ortogonal

Teorema de ***proyección*** *ortogonal:*
Dados H (no necesariamente separable) y $M \lhd H$, y definida $\forall\, x \in H$ la *distancia de* x *a* M según $d(x,M) = \inf_{y \in M} \|x-y\| \in \mathbb{R}$, entonces $\forall x \in H \Rightarrow$

a) $\exists!\, x_M \in M \;/\; \|x - x_M\| = d(x,M) \quad (x_M \equiv x_M(x))$

b) $(x - x_M) \perp M \;;\; \nexists\, y \in M,\; y \neq x_M \;/\; (x-y) \perp M$

c) $x \in M \Leftrightarrow x_M = x \; (\Rightarrow d(x,M) = 0)$.

d) Corolario 1: $H = M \oplus M^{\perp}$

e) Corolario 2: $M = M^{\perp\perp}$.

-permite demostrar fácilmente el anterior teorema de Riesz-Fisher.

- Un enunciado alternativo, en términos de proyectores ortogonales, sería:
Dados H y $M \lhd H \Rightarrow \exists!\, P_M \equiv P_M^{M^{\perp}}$, proyector ortogonal en la dirección de M ($P_M + P_{M^{\perp}} = I$; $H = M \oplus M^{\perp}$; $P_M x = x_M \;\; \forall x \in H$).

Dados H y sus subconjuntos no vacíos A, M, B:

- $A < H \Rightarrow (\overline{A} = A^{\perp\perp} \;;\; \overline{A} = H \Leftrightarrow A^{\perp} = \{\vec{0}\})$
- $M \lhd H \Rightarrow (M = M^{\perp\perp} \;;\; M = H \Leftrightarrow M^{\perp} = \{\vec{0}\})$
- $A^{\perp\perp} = \overline{[A]}$
- $\overline{[A]} = H \underset{(\Leftarrow\, en\ H)}{\overset{(\Rightarrow\, en\ L, H)}{\Leftrightarrow}} A^{\perp} = \{\vec{0}\}$
- $A \lhd H,\; B \lhd H,\; A \perp B \Rightarrow A + B \lhd H$.

Aproximación óptima a un vector

Definición: Dado un conjunto $A = \{x_\alpha\}_{\alpha \in C} \subset L$, $C \equiv$ conjunto indicial de cualquier cardinalidad, subconjunto de un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$, si existe y es único, se define la *aproximación óptima a un vector* x *del espacio* L *en términos de los vectores de* $A \subset L$ como el vector $x_{opt}^{(A)} \in A \subset L \;/\; \|x - x_{opt}^{(A)}\| \le \|x - y\| \;\; \forall\, y \in A$, pudiendo entonces definirse la distancia del vector x al conjunto A como el real $d(x,A) = \|x - x_{opt}^{(A)}\|$.

Definición: Dado un subespacio $M \lhd H$, se define la *aproximación óptima a un vector* x *del espacio* H *en términos de* M como el vector $x_{opt}^{(M)} \in M \lhd H \;/\; \|x - x_{opt}^{(M)}\| \le \|x - y\| \;\; \forall\, y \in M$, siendo $\|x - x_{opt}^{(M)}\|$ la distancia del vector x al subespacio M, $d(x,M) = \|x - x_{opt}^{(M)}\|$.

-Nota: por ser $M \lhd H$, está garantizada la existencia y unicidad de $x_{opt}^{(M)}$.

- Dados $M \lhd H$ y $x \in H \;\Rightarrow\; x_{opt}^{(M)} = P_M x = x_M$.
- Dados $S = \{x_n\}_{n\in I} \subset H$, card $I < \aleph_0$, conjunto ortonormal finito en H , y el subespacio $M = [S] \lhd H \Rightarrow \; x_{opt}^{(M)} = P_M x = x_M = \sum_{n\in I} \langle x_n , x \rangle\, x_n$.

-Nota: en dimensión finita: $M = [S] = \overline{[S]} \lhd H$.

- Dado $S = \{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset H$, conjunto ortonormal en H (sin restricción sobre *card* A), y sea $M = \overline{[S]} \lhd H \;\Rightarrow \forall x \in H$ es $x_{opt}^{(M)} = P_M x = x_M = \sum_{x_\alpha \in S^{(x)}} \langle x_\alpha , x \rangle\, x_\alpha$.

($x_{opt}^{(M)}$ es la aproximación óptima a x en términos de vectores de M).

-Nota: Obsérvese que los escalares $\langle x_\alpha , x \rangle \in \Bbbk$ son las componentes de Fourier del vector x respecto al conjunto ortonormal S , y recuérdese que se tiene $S^{(x)} = \{x_\alpha \in S \;/\; \langle x_\alpha , x \rangle \neq 0\}_{\alpha\in I} = \{x_n\}_{n\in J} \subset S \;/\;$ card $S^{(x)} =$ card$\{x_n\}_{n\in J} =$ card $J \leq \aleph_0$.

- Corolario 1: Dado $x \in M = \overline{[S]} \;\Rightarrow\; x = P_M x = x_M = \sum_{x_\alpha \in S^{(x)}} \langle x_\alpha , x \rangle\, x_\alpha$.
- Corolario 2: Si $S = B \equiv b.o.$ (base ortonormal) de H ($\Leftrightarrow M = \overline{[S = B]} = H$)
  $\Rightarrow\; \forall x \in H \;/\; x = P_M x = x_M = \sum_{x_\alpha \in B^{(x)}} \langle x_\alpha , x \rangle\, x_\alpha$.

Teorema de proyección y aproximación óptima en un Hilbert separable

- Dados H separable y $M \lhd H \;\Rightarrow\; \exists!$ proyector ortogonal $P_M \equiv P_M^{M^\perp}$ ($P_M + P_{M^\perp} = I$; $H = M \oplus M^\perp$) tal que $\forall x \in H$ es $P_M\, x = x_M = \sum_{n\in I} \langle x_n , x \rangle\, x_n$ con $x_M \in M$, *card* $I \leq \aleph_0$ y $\{x_n\}_{n\in I} = B_{\aleph_0} \equiv b.o.n.$, base ortonormal numerable de M.

- Dados H separable, $M \lhd H$ y una b.o.n. de M , $B^{(M)} = \{x_n\}_{n\in I} \subset H$, *card* $I \leq \aleph_0 \;\Rightarrow$ la aproximación óptima a un vector $x \in H$ por elementos de M tiene la expresión: $x_{opt}^{(M)} = P_M x = x_M = \sum_{n\in I} \langle x_n , x \rangle\, x_n$.
  - Corolario: Si $S = B \equiv b.o.n.$ (base ortonormal numerable) de H ($\Leftrightarrow M = \overline{[S = B]} = H$)
    $\Rightarrow\; \forall x \in H$ se tiene $x = P_M\, x = x_M = \sum_{x_n \in B} \langle x_n , x \rangle\, x_n$.