MÉTODOS MATEMÁTICOS
ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Profesora: Mª Cruz Boscá

TEMA 3: ESPACIOS FUNCIONALES Y DESARROLLOS EN SERIE

Por qué la integral de Lebesgue: introducción a los espacios funcionales L^p , L^p_ω

Compleción del espacio $C_{\Bbbk}([a,b])$

Sea $C^p_{\Bbbk}([a,b]) \equiv (C_{\Bbbk}([a,b]), \|\cdot\|_p)$, donde $C_{\Bbbk}([a,b])$ es el espacio lineal de las funciones continuas definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y con recorrido en $\Bbbk$, sobre el cual se constituye el espacio normado definiendo $\| f \|_p = \left| \int_a^b | f(x)|^p \, dx \right|^{\frac{1}{p}}$, $\forall f \in C_{\Bbbk}([a,b])$, con $1 \le p < +\infty$; este espacio normado es espacio euclídeo sólo si p=2 , y es no completo en todo caso.

Según el teorema de compleción, todo espacio normado (no completo) admite una compleción, única salvo isomorfismos en norma.
[⌖ Definición: Dado $(L, \|\cdot\|)$ espacio normado no completo, se define una *compleción* del mismo como un espacio $(L^{>}, \|\cdot\|_{>})$ tal que:

a) $(L^{>}, \|\cdot\|_{>})$ es espacio completo, esto es, de Banach.

b) Contiene un subconjunto L_0 denso en $L^{>}$, esto es, $\overline{L_0} = L^{>}$.

c) $(L_0, \|\cdot\|_{>})$ es isomorfo en norma con $(L, \|\cdot\|)$, $L_0 \simeq L$.]

Está garantizada, por tanto, la existencia de un espacio completo, $\mathsf{L}^p_{\Bbbk}([a,b]) = \overline{C^{\,p}_{\Bbbk}([a,b])}$.

-Nota: Obsérvese que en este enunciado se están identificando $C_{\Bbbk}([a,b])$ y su imagen $C_{\Bbbk 0}([a,b])$ según el correspondiente isomorfismo, donde el subconjunto $C_{\Bbbk 0}([a,b])$ del espacio $(\mathsf{L}^p_{\Bbbk}([a,b]), \|\cdot\|_p)$, norma según integral de Lebesgue, es denso en éste.

Pero resulta que hay que incorporar al espacio funciones - en principio: los límites de sucesiones de Cauchy no convergentes en $C^p_{\Bbbk}([a,b])$ - que no son integrables Riemann en [a,b]. Se necesita, entonces, un nuevo tipo de integración: la integral de Lebesgue, más amplia que la de Riemann.

[▶ Nota: Dada $f:[a,b]\to\mathbb{k}$, función acotada,
f integrable Riemann $\underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{\longrightarrow}}$ f integrable Lebesgue; y ambas integrales coinciden.
(Aunque si f no es acotada, puede $\exists$ su integral de Riemann, en sentido impropio, y $\nexists$ su integral Lebesgue).]

- Y, una vez introducida esta integral, los vectores del nuevo espacio, ya completo, no serán, a la postre, funciones, sino clases de equivalencia de funciones (por la necesidad de cumplir el axioma $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$, *cf.* p. 11).

▶ $\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b])\equiv(\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b]),\|\cdot\|_p)$ es la compleción de $C^p_{\mathbb{k}}([a,b])$, $1\le p<+\infty$, donde $\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b])$ es el conjunto de las clases de equivalencia de funciones $p-$integrables Lebesgue definidas sobre $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y con recorrido en $\mathbb{k}$, esto es, tales que $\int\limits_{[a,b]}|f(x)|^p\,dx<+\infty$ (integral de Lebesgue); sobre él se define la norma $\|f\|_p=\left|\int\limits_{[a,b]}|f(x)|^p\,dx\right|^{\frac{1}{p}}$, $1\le p<+\infty$, obteniéndose un espacio Banach (y un espacio Hilbert $\Leftrightarrow$ p=2).

▶ Puede procederse a las siguientes generalizaciones (compatibles entre sí):

- Sustituir el intervalo cerrado $[a,b]\subset\mathbb{R}$ por cualquier compacto $X\subset\mathbb{R}$ de interior no vacío.

- Partir del espacio normado $C^{p,\omega}_{\mathbb{k}}([a,b])\equiv(C_{\mathbb{k}}[a,b],{}_{\omega}\|\cdot\|_p)$, , donde ${}_{\omega}\|f\|_p=\left|\int\limits_{[a,b]}|f(x)|^p\,\omega(x)dx\right|^{\frac{1}{p}}$ (integral Riemann-Stieltjes), $f\in C_{\mathbb{k}}([a,b])$, siendo $\omega(x):[a,b]\to\mathbb{k}$ una función real, no-negativa e integrable en $[a,b]$, para finalizar con el espacio Banach $\mathrm{L}^{p,\omega}_{\mathbb{k}}([a,b])\equiv(\mathrm{L}^{p,\omega}_{\mathbb{k}}([a,b]),{}_{\omega}\|\cdot\|_p)$, donde $\mathrm{L}^{p,\omega}_{\mathbb{k}}([a,b])$ es el conjunto de las clases de equivalencia de funciones tales que $\int\limits_{[a,b]}|f(x)|^p\,\omega(x)\,dx<+\infty$ (integral de Lebesgue).

-En el caso p=2, se trata de un espacio de Hilbert separable con el producto interno

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{[a,b]}f^*(x)\,g(x)\,\omega(x)\,dx\quad;\quad f,g\in\mathrm{L}^{2,\omega}_{\mathbb{k}}([a,b])\equiv\mathrm{L}^2_{\omega}([a,b]).$$

- También puede sustituirse el intervalo [a,b]$\subset\mathbb{R}$ por cualquier conjunto compacto $X\subset\mathbb{R}^n$, de forma que $C_{\mathbb{k}}[a,b]$ pasa a ser el conjunto $C_{\mathbb{k}}(X)$ de las funciones $f:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{k}$ continuas definidas sobre el compacto $X\subset\mathbb{R}^n$; $\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}(X)\equiv(\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}(X),\|\cdot\|_p)$ es la compleción de $C^p_{\mathbb{k}}(X)\equiv(C_{\mathbb{k}}(X),\|\cdot\|_p)$, $1\le p<+\infty$.

SEMINARIO: LA INTEGRAL DE LEBESGUE(*)

1) La integral de Lebesgue: presentación.

■ Dada $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ (o, en general, una función real acotada sobre [a,b]), su **integral de Riemann** sobre [a,b] se obtiene:

a) Realizando un partición finita del intervalo [a,b] en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, de longitudes respectivas $\Delta_i \equiv \Delta_i([x_{i-1}, x_i]) = x_i - x_{i-1}, \;\; i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Definiendo $|\pi| = \sup_{i \in I} |\Delta_i| = \sup_{i \in I} |x_i - x_{i-1}|$

c) Construyendo las sumas

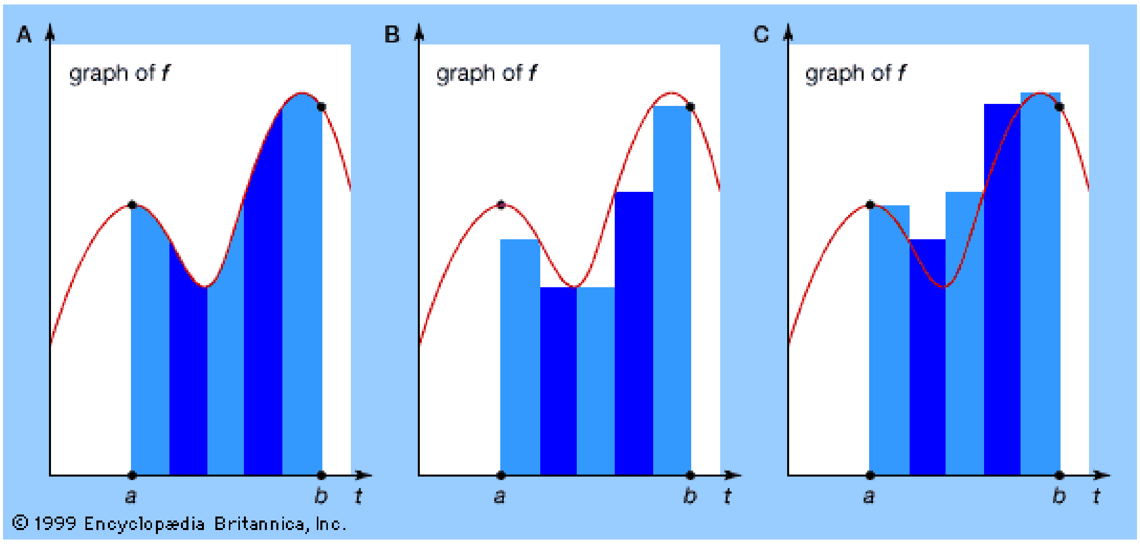
$\sum_{i \in I} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta_i$ y $\sum_{i \in I} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta_i$,

que representan ambas aproximaciones mediante suma de áreas de rectángulos al área total de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

d) Estudiando si el $\lim_{|\pi| \to 0}$ de ambas sumas existe; en caso afirmativo y de coincidencia de ambos valores, la integral de Riemann es, por definición:

$$IR \equiv \int_a^b f \; dx = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i \in I} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta_i(x) = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i \in I} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta_i = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i \in I} \underset{x \in [x_{i-1}, x_i]}{f(x)} \cdot \Delta_i$$

($f(x)$ representa un valor de la función en cada subintervalo).



► Se requiere poder *medir* la altura de $f(x)$ en cada rectángulo, para averiguar el área encerrada por f sobre un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$; posteriormente se suman todas estas áreas y se hace tender $|\pi| \to 0 \;\Rightarrow$ el requisito a exigir es que f se *comporte bien* (por ejemplo, que sea continua) en cuanto a su altura en cada rectángulo y en cuanto al $\lim_{|\pi| \to 0}$.

(*) *Cf.* **L. Abellanas y A. Galindo, *Espacios de Hilbert*, Eudema, 1987.**

● La **integral de Riemann-Stieltjes** $\int f\ d\alpha$ se define, más generalmente, sustituyendo Δ_i por $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, donde α es una función **real** acotada definida sobre $[a,b]$; cuando α posee derivada continua puede reemplazarse $d\alpha$ por $\alpha' dx$, y cuando $\alpha(x) = x$, se obtiene la integral de Riemann.

■ La **integral de Lebesgue** supone un cambio de perspectiva: el procedimiento para su construcción se inicia realizando una partición en el rango de valores de la función f:

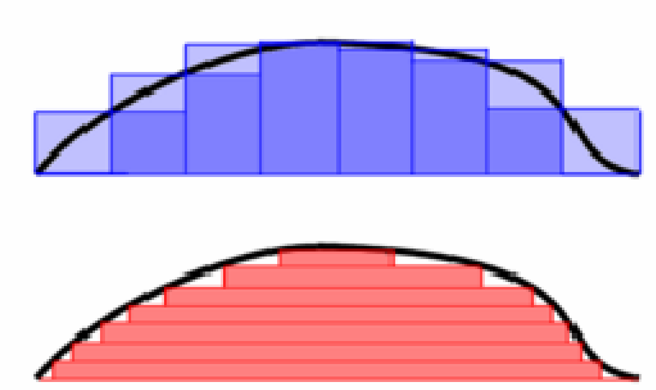
a) Realizamos un partición finita del intervalo $[\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)]$ en n subintervalos $[y_{i-1}, y_i]$, $\pi: \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, de longitudes respectivas $\Delta_i \equiv \Delta_i([y_{i-1}, y_i]) = y_i - y_{i-1},\ \ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Definimos $|\pi| = \sup\limits_{i\in I} |\Delta_i| = \sup\limits_{i\in I} |y_i - y_{i-1}|$

c) Nos planteamos *medir* las bases de los rectángulos definidos por esas alturas $\Delta_i = y_i - y_{i-1}$ ($y_{i-1} \le f(x) < y_i$): ¿cuál es el valor *medido* $\mu(B_i)$ a tomar en el *boreliano* (el significado preciso de este término se aclarará más adelante) $B_i \equiv$ conjunto de puntos x para los que $f(x)$ pertenece a $[y_{i-1}, y_i)$:

$B_i = \{\ x \in [a,b]\ \ /\ \ f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\ \} \subset [a,b]$, $i \in I$

$\mu(B_i) \equiv$ *medida* del conjunto B_i



c) Construimos la suma $\sum\limits_{i\in I} f_i(x)\cdot\mu(B_i)$ ($x \in B_i$)

d) Tomamos el límite $\lim\limits_{|\pi|\to 0} \sum\limits_{i\in I} f_i(x)\cdot\mu(B_i) = \int\limits_{[a,b]} f\ dx \equiv IL$

(*integral de Lebesgue*).

● Esta nueva integral es una extensión de la de Riemann: es aplicable a una familia de funciones más amplia.
(En definitiva, *se compensa un peor comportamiento* de la función, que la hace no integrable Riemann, con la consideración de conjuntos dominio más generales, a los que se requiere *sólo* ser medibles).

▶ Se requiere que [a,b] sea subdivisible en un conjunto de subconjuntos de tipo más general que los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ $\to$ conjuntos medibles $\to$ poder *medir* los conjuntos de valores de x para los que $f(x)$ está comprendido en $[y_{i-1}, y_i)$ $\Rightarrow$ el requisito a exigir es que f sea medible Borel en [a,b] $\to$ teoría de la medida.

-Nota: también es posible desarrollar la integral de Lebesgue sin recurrir a la teoría de la medida.

2) Conjuntos de Borel e integral de Lebesgue

Medida de Borel-Lebesgue (nociones básicas)

Dada la familia mínima de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}=\{B_i\}_{i\in I}$, $B_i \subset \mathbb{R}\ \forall i\in I$, tal que contenga todos los intervalos (a,b) de $\mathbb{R}$, los subconjuntos B_i se definen como *conjuntos de Borel* o *borelianos* de $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ se cumple:

i) $\mathcal{B}$ es cerrada bajo unión numerable: $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$.

ii) $\mathcal{B}$ es cerrada bajo complementos: $(\mathbb{R}\setminus B_i)\in \mathcal{B}\ \ \forall i$.

▶ Existe una familia mínima cuyos conjuntos son borelianos de $\mathbb{R}$ (ya que:
1) la intersección de cualquier colección de familias que satisfagan las dos condiciones dadas es a su vez una familia que las satisface, y
2) la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ es una familia que los cumple).

● $\mathcal{B}\equiv$conjunto universal introducido para desarrollar la teoría de la medida$\equiv$familia más sencilla de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que permite compaginar la topología usual sobre $\mathbb{R}$ y la teoría de la integración.

▶ Todo abierto de $\mathbb{R}$ es boreliano (es unión numerable de intervalos abiertos); todo cerrado de $\mathbb{R}$ es boreliano, y en particular lo es todo compacto; toda colección numerable de puntos es un boreliano (por serlo un punto); el conjunto de puntos racionales de [0,1] es boreliano; $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son borelianos; $\varnothing$ es boreliano.

▶ Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ no borelianos (no son triviales: un ejemplo en Apostol, *Análisis matemático*, p. 370, ejm. 10-36).

Dado un boreliano $B_i\in\mathcal{B}$, se define su *medida de Borel-Lebesgue*, $\mu(B_i)$, como $\mu(B_i)=\inf_{A\in\mathrm{A}} l(A)$, donde A es la clase de todos los abiertos que contienen a B_i,

$$\mathrm{A}=\left\{A\subset\mathbb{R}\ /\ A=\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)\ ,\ (a_j,b_j)\cap(a_k,b_k)=\varnothing\ \ si\ k\neq j,\ \ B_i\subset A\right\},$$

y $l(A)$ es la longitud de A, definida según

$$l(A)=\sum_{i=1}^{\infty}|b_i-a_i|\leq+\infty .$$

⌖ Un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ posee *medida nula* si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un recubrimiento numerable de B por medio de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes sea menor que ε: $\forall \varepsilon > 0 \,/\, B \subseteq \bigcup_{i \in N} (a_i, b_i)$, siendo $\sum_{i \in N} |b_i - a_i| < \varepsilon$, $card\ N \leq \aleph_0$.

► $B \in \mathscr{B} \;\Rightarrow\; \mu(B) = \inf\{\mu(A) \;/\; A\ abierto,\ B \subset A\}$.

► $B \in \mathscr{B} \;\Rightarrow\; \mu(B) = \sup\{\mu(C) \;/\; \text{C compacto},\ \text{C} \subset B\}$.

► Dado $\{B_n\}_{n \in I} : B_n \cap B_m = \varnothing$ si $n \neq m \;\Rightarrow\; \mu(\bigcup_1^{\infty} B_n) = \sum_1^{\infty} \mu(B_n)$ (σ-aditividad).

■ Ejemplos:

- $\mu(\varnothing) = 0$
- $\mu(\mathbb{R}) = \infty$
- $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = |b - a|$
- $\mu((a,+\infty)) = \mu((-\infty,a)) = \mu([a,+\infty)) = \mu((-\infty,a]) = \infty$
- $\mu(\{x \in Q \wedge x \in [0,1]\}) = 0$
- $card\ B \leq \aleph_0 \;\underset{\cancel{\Leftarrow}}{\overset{\Rightarrow}{}}\; \mu(B) = 0$
- M denso en $\mathbb{R}$, $\overline{M} = \mathbb{R} \;\cancel{\Rightarrow}\; \mu(M) = \infty$; por ejemplo: $\mu(Q) = 0$
- $\exists$ borelianos de medida nula no numerables (ejm: *ternario de Cantor, cf.* Abellanas-Galindo, ejemplo 3, p. 69).

Funciones medibles Borel o borelianas

⌖ Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *medible Borel o boreliana* $\Leftrightarrow$ $\forall B \in \mathscr{B}$ se tiene $f^{(-1)}(B) \in \mathscr{B}$.

⌖ Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ es *medible Borel o boreliana* $\Leftrightarrow$ $\forall B \in \mathscr{B}$ se tiene $f^{(-1)}(B) \in \mathscr{B}$, $f^{(-1)}(+\infty) \in \mathscr{B}$ y $f^{(-1)}(-\infty) \in \mathscr{B}$.

⌖ Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es *medible Borel o boreliana* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ son borelianas.

► Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borelianas $\Rightarrow$ $f + g$, λf $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, fg , $|f|$ *y* $f \circ g$ son borelianas.

► Criterios:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel $\Leftrightarrow$ $f^{(-1)}\{(a,b)\} \in \mathscr{B}$ $\forall a, b$.
- f_n boreliana $\forall n \in N$ y $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x) \Rightarrow$ f boreliana.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel $\Leftrightarrow \{x : f(x) < b\} \in \mathscr{B}$ $\forall b$.

Integral de Lebesgue

Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que f es acotada, boreliana y $f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, se define su integral de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ como

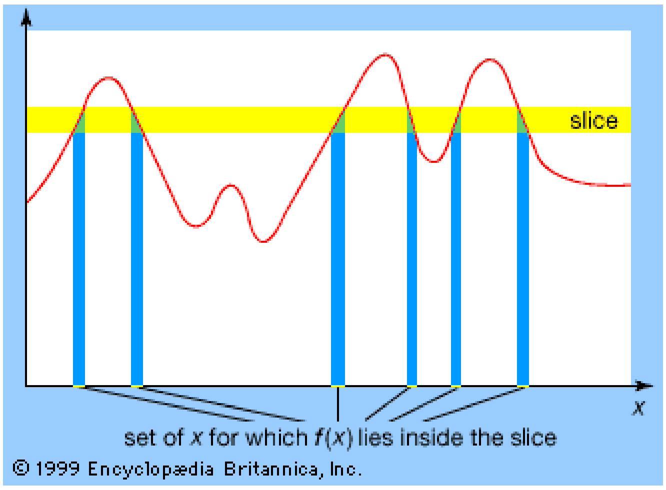
$$\int_{\mathbb{R}} f\ dx=\lim_{|\pi|\to 0}\sum\nolimits_{\pi}(f)\ ,$$

donde

$$\pi:\inf_{f(x)\in R(f)} f(x)=y_0<y_1<\ldots<y_{n-1}<y_n=\sup_{f(x)\in R(f)} f(x)$$

representa una partición del recorrido de f y

$$\sum\nolimits_{\pi}(f)=\sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1}\mu\left(f^{(-1)}([y_{i-1},y_i))\right)+y_{n-1}\mu\left(f^{(-1)}([y_{n-1},y_n])\right).$$



Notas:

- La suma $\sum_{\pi}(f)$ es una aproximación inferior al área encerrada por el gráfico de f y el eje OX.
- Si realizamos una partición π' más fina que π, entonces $\sum_{\pi'}(f)\geq\sum_{\pi}(f)$.
- Generando la sucesión $\left\{\sum_{\pi_n}(f)\right\}_{n\in N}$ de particiones cada vez más finas, esta sucesión, monótona no decreciente, tiene un límite, el cual puede ser finito o no. Por definición, este límite es la integral de Lebesgue de f sobre $\mathbb{R}$.

[La anterior definición puede ir sucesivamente ampliándose, definiéndose la integral de Lebesgue para funciones borelianas, $f\geq 0$, no necesariamente acotadas; funciones reales borelianas (no necesariamente ni $f\geq 0$ ni acotadas)… hasta llegar a la definición para una función boreliana integrable Lebesgue, ver a continuación].

⌖ Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ boreliana, es *integrable Lebesgue* sobre $\mathbb{R}$, $f\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}|f|\,dx<+\infty$, donde $|f|=f_+(x)+f_-(x)$, $f_+(x)=\max\{f(x),0\}\geq 0$ y $f_-(x)=\max\{-f(x),0\}\geq 0$. Su *integral de Lebesgue sobre* $\mathbb{R}$ se define entonces como el valor **finito** $\int_{\mathbb{R}} f\;dx=\int_{\mathbb{R}} f_+(x)dx-\int_{\mathbb{R}} f_-(x)dx$.

⌖ En particular:

- Dada $f:B\to\mathbb{R}$, se define como boreliana sobre B cuando la función $F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in B\\ 0 & \text{si } x\notin B\end{cases}$ es boreliana (esto es, lo es sobre $\mathbb{R}$).
- Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ boreliana, es *integrable Lebesgue* sobre $[a,b]$, $f\in L^1_{\mathbb{R}}([a,b])\Leftrightarrow$ la función $F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{si } x\notin[a,b]\end{cases}$ es tal que $F\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, definiéndose su *integral de Lebesgue* sobre $[a,b]$ como $\int_a^b f\;dx=\int_{\mathbb{R}} F\;dx$.

- Dada $f:B\to\mathbb{R}$, $B\in\mathscr{B}$, boreliana, es *integrable Lebesgue* sobre B, $f\in L^1_{\mathbb{R}}(B) \Leftrightarrow$ la función $F(x)=f(x)\chi_B(x)$, donde χ_B representa la *función característica* para B, $\chi_B(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in B\\ 0 & \text{si } x\notin B\end{cases}$, es tal que $F\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, definiéndose su *integral de Lebesgue* sobre B como $\int_B f\;dx=\int_{\mathbb{R}} F\;dx$ (si B es un intervalo, finito o no, de extremos α y β, se representa $\int_B\equiv\int_\alpha^\beta$ también).
- Dada $f:B\to\mathbb{C}$, $B\in\mathscr{B}$, $f=u+iv$, boreliana, es *integrable Lebesgue* sobre B, $f\in L^1_{\mathbb{C}}(B)\Leftrightarrow$ la función $|f|\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, definiéndose su *integral de Lebesgue* sobre B como $\int_B f\;dx=\int_B \mathrm{u}\;dx+i\int_B \mathrm{v}\;dx$.

-Nota: La mayor parte de los resultados sobre integración de Lebesgue para funciones reales pueden extenderse a funciones complejas, siendo usualmente suficiente escribir $f=u+iv$ y aplicar el resultado en cuestión a las funciones reales $u=\mathrm{Re}(f)$ y $v=\mathrm{Im}(f)$. Por ello, a partir de ahora, salvo que sea preciso especificar, se usará la notación $L^1_{\Bbbk}(B)\equiv L^1(B)$.

Propiedades

▶ Sean $f,g:\mathbb{R}\to\Bbbk$, borelianas. Entonces:

- $f,g\in L^1(\mathbb{R})\Rightarrow \alpha f+\beta g\in L^1(\mathbb{R})\ \ \forall\alpha,\beta\in\Bbbk$ ($L^1_{\Bbbk}(\mathbb{R})$ es espacio lineal sobre $\Bbbk$).
- $\int_B(\alpha f+\beta g)\;dx=\alpha\int_B \mathrm{f}\;dx+\beta\int_B \mathrm{g}\;dx\ \ \forall\alpha,\beta\in\Bbbk$.

- $\left|\int_{\mathbb{R}} f\ dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|\ dx \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R})$.
- Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ y $|g| \leq f \;\Rightarrow\; g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.
- Sean $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, con $f \leq g \;\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f\ dx \leq \int_{\mathbb{R}} g\ dx$.
- f acotada en $[a,b] \;\Rightarrow\; f \in L^1([a,b])$, siendo $\left|\int_a^b f\ dx\right| \leq M\,|b-a|$,

$M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

■ Ejemplos:

- Toda función continua en $[a,b]$ es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$:

$C_{\mathbb{k}}([a,b]) \subset L^1_{\mathbb{k}}([a,b])$.
- $f(x) = x^n \notin L^1(\mathbb{R})$.
- $\chi_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in Q \\ 1 & \text{si } x\notin Q \end{cases}$, definida en $[0,1]$, es integrable Lebesgue, $\chi_Q \in L^1([0,1])$

(nota: pero no es integrable Riemann).

3) La integral de Lebesgue frente a la de Riemann

■ La integral de Lebesgue es más amplia que la de Riemann:

Propiedades satisfechas casi por doquier: Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, una propiedad $P(x)$, dependiente del punto $x \in A$, se verifica *casi por doquier* o *casi doquiera* (notación: c.d.) en A $\Leftrightarrow$ el subconjunto de puntos de A en que no se verifica es un conjunto de medida nula.

► *Criterio de Lebesgue*: Dada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, acotada, f es integrable Riemann sobre $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f es continua c.d. en $[a,b]$ (*cf.* Apostol, p. 208ss.).

► Existen funciones acotadas y discontinuas en todo punto que son integrables Lebesgue (ejemplo: χ_Q).

► Dada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, acotada, f es integrable Riemann sobre $[a,b]$ $\Rightarrow$
1) $f \in L^1([a,b])$ (es decir, f es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$); el inverso es falso.
2) Ambas integrales coinciden.

► Sea $f: B \to \mathbb{R}$, boreliana. Entonces:

- Si f no es acotada en B , entonces puede existir la integral de Riemann (impropia) y no existir la integral de Lebesgue (Ejemplo: $B = (0,1]$ y $f(x) = \frac{1}{x} sen \frac{1}{x}$) (*cf.* Abellanas-Galindo, p. 64).

- Si B es un intervalo infinito (semirrecta o recta real), entonces:
  a) $\exists$ integral de Riemann de $|f|$ $\Rightarrow$ $\exists$ integral de Lebesgue de f y coinciden.
  b) $\exists$ integral impropia de Riemann de f y $|f|$ no es integrable Riemann $\Rightarrow$ f no es integrable Lebesgue.
  (Ejemplo: $f(x) = \dfrac{sen\ x}{x}$ admite la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{sen\ x}{x}\, dx = \pi$, obtenible mediante residuos, pero la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\dfrac{sen\ x}{x}\right| dx$ no es finita, ya que al tenerse el módulo no se producen *compensaciones*, *cf.* Abellanas-Galindo, p. 65).

4) Funciones p-integrables Lebesgue

⌖ Dados $f : B \to \mathbb{k}$, boreliana, y $p \in \mathbb{R},\ 1 \le p < +\infty$, definimos f como $p-$integrable Lebesgue en B, que notaremos $f \in L_{\mathbb{k}}^{p}(B) \equiv L^{p}(B)$,

$$\Leftrightarrow \int_B |f(x)|^p\, dx \ < \ +\infty \ .$$

BIBLIOGRAFÍA (integral de Lebesgue)

- **(*) L. Abellanas y A. Galindo, *Espacios de Hilbert*, Eudema, 1987.**
- **T.M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, 1976.**
- **G. Helmberg, *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North Holland, 1969.**
- **A. N. Kolmogórov y S.V. Fomín, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, M.I.R., 1975.**
- **P. Roman, *Some modern mathematics for physicists and other outsiders*, vol. 1, Pergamon, 1975.**
- **G.E. Shilov and B.L. Gurevich, *Integral, Measure & Derivative: A unified approach*, Dover, 1977.**

FIN DEL SEMINARIO

ESPACIOS FUNCIONALES

Espacios funcionales de Banach L^p, L^p_ω

Espacios normados L^1

El conjunto $\mathrm{L}^1_{\Bbbk}(\mathbb{R}) \equiv \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ es un espacio lineal, sobre el que la aplicación $\|f\|_1 = \left|\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx\right|$, $f \in C_{\Bbbk}(\mathbb{R})$, donde $\int$ simboliza la integral de Lebesgue, **no** genera un espacio normado, debido a que el axioma 1 de la definición de norma, $\|x\| \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$, no se satisface, ya que dos funciones $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1_{\Bbbk}([a,b])$, $f_1 \neq f_2$, pueden ser tales que $\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2|\; dx = 0$ (por ejemplo, dos funciones que difieran de valor sólo sobre un conjunto de puntos de medida nula).
-Nota: en particular, $\mathbb{R}$ puede sustituirse por cualquier boreliano $B \subseteq \mathbb{R}$).

Dadas dos funciones $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1_{\Bbbk}([a,b])$, se definen como *iguales casi (por) doquiera o iguales* c.d., ($f_1 \triangleq f_2$), cuando $\mu(\{x : g(x) = f_1(x) - f_2(x) \neq 0\}) = 0$, donde μ simboliza la medida de Borel-Lebesgue.

Dos funciones $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1_{\Bbbk}([a,b])$ son iguales c.d. $\Leftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2|\; dx = 0$.

La irrelevancia, a efectos de integración (Lebesgue), de los conjuntos Borel de medida nula, sugiere ampliar la familia de funciones integrables incluyendo en ella funciones que, incluso aunque no sean estrictamente borelianas, sean iguales c.d. a funciones integrables, es decir, a funciones que pertenecen originariamente a $\mathrm{L}^1_{\Bbbk}(\mathbb{R})$ (*cf.* Abellanas y Galindo, p. 60).

Dada una función $g : \mathbb{R} \to \Bbbk$, $g \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, si existe otra función $f : \mathbb{R} \to \Bbbk$, boreliana y $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, tal que $f \triangleq g$ (son iguales c.d.), convenimos en ampliar el espacio lineal $L^1_{\Bbbk}(\mathbb{R})$ incluyendo esa función g.

Dado el espacio lineal ampliado $\mathrm{L}^1_{\Bbbk}(\mathbb{R}) \equiv \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, se define el espacio $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ como el espacio cociente $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})/R$, donde R representa la relación de equivalencia $R \equiv$"ser igual c.d.", definida en $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ampliado.

- Es decir: $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) = \mathrm{L}^1(\mathbb{R})/R = \left\{C_f \equiv \{f\} = \{g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \;:\; g\,R\,f \Leftrightarrow g = f \;\; c.d.\}\right\}$, conjunto (espacio lineal) de las clases de equivalencia.

⌖ Obtenemos así el espacio normado $(\mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, donde se ha tomado para dos funciones $f \triangleq g$, la f originalmente en $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ y la g incorporada tras la ampliación realizada, que $\|g\|_1 = \|f\|_1 = \int_B |f(x)|^1 dx$, por definición (usualmente se elige como representante de la clase $\{f\}$, en su caso, la función continua o, más generalmente, la boreliana).

⌖ Definición análoga sustituyendo $\mathbb{R}$ por cualquier boreliano.

- Propiedades:
- $(\mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ es un espacio normado completo o espacio Banach.
- $(\mathrm{L}^1(B), \|\cdot\|_1)$ es un espacio Banach.
- $C_{\Bbbk}([a,b])$ es denso en $\mathrm{L}^1_{\Bbbk}([a,b])$, esto es, $\mathrm{L}^1_{\Bbbk}([a,b]) = \overline{C^1_{\Bbbk}([a,b])}$ (a este respecto, consultar la nota en la página siguiente para la propiedad análoga en $\mathrm{L}^p_{\Bbbk}([a,b])$).

- $(\mathrm{L}^1_{\Bbbk}([a,b]), \|\cdot\|_1)$ es la compleción de $(C_{\Bbbk}([a,b]), \|\cdot\|_1)$

-Notas:
1) Los elementos de L^1 son clases de equivalencia de funciones, $C_f \equiv \{f\}$, y no funciones.
2) Dos funciones iguales c.d. pertenecen al mismo elemento de L^1.
3) Carecen de sentido, entonces, afirmaciones del tipo "$f \in \mathrm{L}^1$ posee un valor dado en un punto", ya que, por ejemplo, carece de sentido hablar del valor de $C_f \equiv \{f(x) = \cos x\} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([0,\pi])$ en un punto $x_0 \in [0,\pi]$, pues otras funciones, como $g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \neq x_0 \\ \alpha \neq \cos x_0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$, también pertenecen a $\{f\}$.
4) Sin embargo, y abusando del lenguaje, se suele llamar *función* a los elementos de dicho espacio L^1, identificándolos, de existir, con el elemento de cada clase $\{f\}$ que es continuo (el cual, cuando existe, es único).

Espacios normados L^p

El procedimiento seguido para L^1 puede generalizarse para L^p, $\forall\, 1 \le p < +\infty$:

- Partimos del espacio lineal $\mathrm{L}^p(B)$.
- Incluimos en la definición de funciones $p-$integrables Lebesgue en B las funciones $g: B \to \mathbb{k}$ para las que $\exists f$ boreliana tal que:

1) $f \in \mathrm{L}^p(B)$, esto es, f es $p-$integrable Lebesgue en B, y

2) $f \triangleq g$, definida ahora la igualdad c.d. como $f \triangleq g \iff \int_B |f-g|^p dx = 0$.

- Ampliamos así el espacio inicial obteniendo otro espacio lineal $\mathrm{L}^p(B)$ cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones.

- Obtenemos finalmente el espacio normado Banach $(\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}(B), \|\cdot\|_p)$, donde se ha tomado para dos funciones $f \triangleq g$ que $\|g\|_p = \|f\|_p = \left|\int_B |f(x)|^p\, dx\right|^{\frac{1}{p}}$, por definición, teniéndose para ellas $\|f-g\|_p = 0$ (de forma que ambas forman parte del mismo elemento $C_f \equiv \{f\} \in \mathrm{L}^p(B)$ o correspondiente clase de equivalencia).

▶ Propiedades:

- $(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado completo o espacio Banach.
- $(\mathrm{L}^p(B), \|\cdot\|_p)$ es un espacio Banach.
- $C_{\mathbb{k}}([a,b])$ es denso en el $\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b])$, esto es, $\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b]) = \overline{C^p_{\mathbb{k}}([a,b])}$.

  -Nota: Obsérvese que, más rigurosamente, y ateniéndonos al enunciado del teorema de compleción, esta propiedad debería enunciarse como: "$(\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b]), \|\cdot\|_p)$, norma según integral de Lebesgue, contiene un subconjunto $C_{\mathbb{k}0}([a,b])$ denso en él y tal que el espacio $(C_{\mathbb{k}0}([a,b]), \|\cdot\|_p)$, norma según integral de Lebesgue, es isomorfo con el espacio original no completo $(C_{\mathbb{k}}([a,b]), \|\cdot\|_p)$, norma según integral de Riemann". O sea, se están identificando $C_{\mathbb{k}}([a,b])$ y su imagen $C_{\mathbb{k}0}([a,b])$ según el correspondiente isomorfismo.

▶ $(\mathrm{L}^p_{\mathbb{k}}([a,b]), \|\cdot\|_p)$ es la compleción de $(C_{\mathbb{k}}([a,b]), \|\cdot\|_p)$.

- También puede generalizarse a $\mathbb{R}^n$, mediante la apropiada extensión de la integral de Lebesgue, obteniéndose los espacios $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (la medida de una celda $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ se define como el producto $l(a_1,b_1)\times l(a_2,b_2)\times\ldots\times l(a_n,b_n)$).

▶ *Teorema de Fubini 1:* Dado $B \subseteq \mathbb{R}$, subconjunto medible Borel; dada $\mathrm{K}(x,y): B\times B \to \mathbb{C}$, boreliana $\mathrm{K} \in \mathrm{L}^2(B\times B)$, y definidos

$$h_x(x) = \left(\int_B |\mathrm{K}(x,y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \;;\quad h_y(y) = \left(\int_B |\mathrm{K}(x,y)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \;;$$

$$I_1 = \int_B f(x)(\int_B \mathrm{K}(x,y)\, g(y)\, dy)\, dx \;,$$

$$I_2 = \int_B g(y)(\int_B \mathrm{K}(x,y) f(x)\, dx)\, dy \text{, con } f,g \in \mathrm{L}^2(B);$$

entonces:

- $h_x \in \mathrm{L}^2(B)$, $h_y \in \mathrm{L}^2(B)$, $I_1 < +\infty \;\Leftrightarrow\; I_2 < +\infty$;
- $\|h_x\|^2_{\mathrm{L}^2(B)} = \int_B (\int_B |\mathrm{K}(x,y)|^2\, dy)\, dx = \|\mathrm{K}\|^2_{\mathrm{L}^2(B\times B)}$;
- $\|h_y\|^2_{\mathrm{L}^2(B)} = \int_B (\int_B |\mathrm{K}(x,y)|^2\, dx)\, dy = \|\mathrm{K}\|^2_{\mathrm{L}^2(B\times B)}$;
- $I_1 = I_2$.

▶ *Teorema de Fubini 2:* Dados $M \subset \mathbb{R}^m$ y $N \subset \mathbb{R}^n$, subconjuntos medibles Borel, $m,n \geq 1$; dada $f(x,y): M\times N \to \mathbb{C}$, boreliana, y definidos

$$I_{MN} = \int_M (\int_N |f(x,y)|\, d^n y)\, d^m x \quad \text{e} \quad I_{NM} = \int_N (\int_M |f(x,y)|\, d^m x)\, d^n y \text{, entonces:}$$

- $I_{MN} < +\infty \;\Leftrightarrow\; I_{NM} < +\infty$;
- I_{MN} o I_{NM} (y, por tanto, las dos) son finitas $\Leftrightarrow$ $f \in \mathrm{L}^1(M\times N)$, teniéndose entonces $\int_M (\int_N f(x,y)\, d^n y)\, d^m x = \int_N (\int_M f(x,y)\, d^m x)\, d^n y = \int_{M\times N} f(x,y)\, d^m x\, d^n y$.

Espacios funcionales de Hilbert L^2, L^2_ω

De todos los espacios de Banach $(\mathrm{L}^p, \|\cdot\|_p)$, tan sólo el caso $p = 2$ es un espacio euclídeo: tan sólo para $p = 2$ la norma cumple la ley del paralelogramo, permitiendo derivar un producto escalar vía la identidad de polarización, el cual a su vez retorna la norma a partir de $\|f\| = +\sqrt{\langle f, f\rangle}$.

▶ El espacio $(\mathrm{L}^2(B), <,>)$, con $\langle f, g\rangle = \int_B f^*(x) g(x) dx \;\; \forall f,g \in \mathrm{L}^2$, es un Hilbert separable (medida de Borel-Lebesgue).

⌖ Una generalización posible para este espacio se obtiene introduciendo la medida de Lebesgue-Stieltjes, que nos permite obtener los espacios de Hilbert $(\mathrm{L}^2_\omega(B), <,>)$. En estos apuntes, sin entrar en más detalles, consideraremos el espacio lineal $L^2_\omega(B)$, o espacio de las funciones $f: B \to \mathbb{k}$ tales que $\int_B |f|^2 \omega dx < +\infty$, siendo $\omega: B \to \mathbb{R}$ una función real, denominada como *función peso*, tal que $W: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $W(x) = \begin{cases} \omega(x) & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$ cumple:

1) $W \neq 0$; $W(x) \geq 0 \ \ \forall x \in B$, 2) $W \in L^1(\mathbb{R})$, 3) $\exists \alpha > 0 : \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|} W(x)\, dx < \infty$;

sobre este espacio se construye el *espacio de Hilbert* $(L^2_\omega(B), <,>)$, mediante la definición del producto escalar $\langle f, g \rangle_\omega = \int_B f^*(x) g(x) \omega(x) dx$.

Nota: estas condiciones garantizan la existencia de b.o.n. polinómicas de $(L^2_\omega(sop\, W), <,>)$ obtenidas por ortonormalización de $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $sop\, W(x) = \overline{\{x \in D(W) \,/\, W(x) \neq 0\}}$, o sea: $\left\{P_n(x) W^{1/2}(x)\right\}_{n=0}^{+\infty}$ es b.o.n. de $(L^2_\omega(sop\, W), <,>)$ (veáse Abellanas-Galindo pp. 113-114).

- El espacio $(L^2_\omega(B), <,>)$ es un Hilbert separable (medida de Lebesgue-Stieltjes).
- $f = g\, \omega^{\frac{1}{2}} \in L^2(B) \iff g = f\, \omega^{-\frac{1}{2}} \in L^2_\omega(B)$ (lo que permite establecer un isomorfismo, ya que $\| f \|_2 = \| g \omega^{\frac{1}{2}} \|_2 = {}_\omega\| g \|_2$).

Casos que consideraremos primordialmente:

$$B = [a,b], \text{ con } -\infty \leq a < b \leq +\infty .$$

- ⌖ Todos estos espacios de Hilbert, por ser separables, poseen base ortonormal numerable, $B = \{e_n\}_{n \in I}$, $card\ I \leq \aleph_0$. Su conocimiento tendrá entonces una aplicación práctica directa, el permitir abordar el problema de la aproximación de *funciones* (vectores) del espacio $L^2(B)$ mediante su desarrollo en serie (*aproximación en la norma o cuadrática*):

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m(\varepsilon) \in N \ / \ d(f, f^{(m)}_{aprox}) < \varepsilon$, donde $f^{(m)}_{aprox} = \sum_{n=1}^{m} \langle e_n, f \rangle e_n$ y

$$d^2(f, f^{(m)}_{aprox}) = \left\| f - f^{(m)}_{aprox} \right\|^2 = \int_B \left| f - \sum_{n=1}^{m} \langle e_n, f \rangle e_n \right|^2 dx < \varepsilon^2$$, teniéndose

$$\left\| f - f^{(m)}_{aprox} \right\| \xrightarrow{m \to \infty} 0 \iff \lim_{m \to \infty} \int_B \left| f - \sum_{n=1}^{m} \langle e_n, f \rangle e_n \right|^2 dx = 0 \iff f = \sum_{n \in I} \langle e_n, f \rangle e_n$$

(expresiones análogas en $L^2_\omega(B)$, sin más que añadir la función peso en las integrales).

Bases polinómicas en los espacios L^2, L^2_ω

Grosso modo: Puesto que $L^p_{\Bbbk}([a,b]) = \overline{C^p_{\Bbbk}([a,b])}$, toda función de $L^p_{\Bbbk}([a,b])$ puede aproximarse por funciones continuas (aproximación cuadrática: toda función de cuadrado integrable Lebesgue es límite de una sucesión de funciones continuas). Y como toda función continua en un intervalo compacto es aproximable por polinomios (según el teorema de aproximación de Weirstrass, aproximación continua, norma del supremo: los polinomios son un conjunto denso en $C_{\Bbbk}([a,b])$), toda función de $L^2(B)$ es aproximable por polinomios.

En definitiva, vamos a emplear bases ortonormales polinómicas en estos espacios de Hilbert, lo que será posible merced a los teoremas:

- Dados $[a,b]$, a y b finitos, y $A=\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces $\Rightarrow\ \overline{[A]}=\mathrm{L}^2([a,b])$
- Dado $\mathrm{P}_n(x)=\dfrac{1}{\gamma_n}\dfrac{d^n\left[(x-a)(x-b)\right]^n}{dx^n}$, $0\le n<\infty$,

con $\gamma_n=\dfrac{n!}{\sqrt{(2n+1)}}(b-a)^{n+\frac{1}{2}}\in\mathbb{R}$, elegido de forma que $\|\mathrm{P}_n\|=1\ \forall n$, entonces

1) P_n es un polinomio de grado n, y

2) $\{\mathrm{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la base ortonormal numerable de $\mathrm{L}^2([a,b])$ que se obtiene aplicando el método de Gram-Schmidt al conjunto $A=\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Esquema de su construcción (*cf.* Helmberg, pp. 55ss.):

- Caso a y b finitos: partimos del conjunto linealmente independiente numerable $A=\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, a partir del cual por un método apropiado (por ejemplo: Gram-Schmidt) se obtiene un conjunto ortonormal numerable S con la misma envolvente lineal, $[S]=[A]$, la cual es, por tanto, densa en $\mathrm{L}^2([a,b])$, esto es, S es una base ortonormal numerable (b.o.n.) del espacio $H=\mathrm{L}^2([a,b])$:

$\mapsto$ polinomios de Legendre: $[a,b]=[-1,+1]$, $P_n(x)=\dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$; la b.o.n. viene dada por $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}\equiv\left\{\mathrm{P}_n(x)=\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$

($\|P_n\|=\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}\neq 1$; $\|\mathrm{P}_n(x)\|=1\ \ \forall n$).

- Casos en que a o b, o ambos, no son finitos: se generaliza el procedimiento anterior, ahora en el espacio L^2_{ω}, de manera que la introducción de la función peso $\omega(x)$ permite considerar a $\omega^{1/2}x^n$ como perteneciente al espacio L^2 (la base obtenida ahora, estrictamente hablando, no será polinómica, por la presencia del factor $\omega^{1/2}$):

$\mapsto$ polinomios de Hermite: $[a,b]=(-\infty,+\infty)$, $\omega(x)=e^{-x^2}$, espacio $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$; la b.o.n. es $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}=\left\{\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(n!2^n\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}H_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$.

$\mapsto$ polinomios de Laguerre: $[a,b]=[0,+\infty)$, $\omega(x)=e^{-x}$, espacio $\mathrm{L}^2([0,+\infty))$,

$L_n(x)=\dfrac{1}{n!}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$, la b.o.n. es $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}=\left\{e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Bases trigonométricas en el espacio $L^2([a,b])$

En el espacio $\mathrm{L}^2([a,b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, existen bases ortonormales numerables constituidas por funciones trigonométricas (bases de Fourier o, en particular, de senos y cosenos):

- Denominaremos como polinomio trigonométrico una expresión $\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k senkx)$, la cual, según la fórmula de Moivre, $e^{inx} = \cos nx + i\cdot \mathrm{sen}\, nx = (\cos x + i\cdot \mathrm{sen} x)^n$, puede expresarse como $\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \mathrm{sen} kx) = \sum_{r,s=0}^{n} a_{r,s}(\cos x)^r(\mathrm{sen} x)^s = \sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx}$, donde

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k) & k>0 \\ \alpha_0 & k=0 \\ \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k) & k<0 \end{cases}.$$

- En definitiva: un polinomio trigonométrico no es sino una combinación lineal de elementos de uno cualquiera de los tres conjuntos:, $\left\{e_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{e^{ikx}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\left\{e_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{\cos kx,\ \mathrm{sen}kx\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{e_n^{(3)}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{(\cos x)^r,\ (\mathrm{sen} x)^s\right\}_{r,s=0}^{\infty}$.

- Para los polinomios trigonométricos es válido un teorema análogo al de Weirstrass para los polinomios usuales, de forma que $\forall f \in C([-\pi,+\pi])$ se tiene que es aproximable (convergencia en el sentido de la norma del supremo) en términos de ellos. Consecuentemente, es posible obtener una base ortonormal numerable: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es b.o.n. de $\mathrm{L}^2([-\pi,+\pi])$.

- Más generalmente, puede elegirse cualquier intervalo $[a,b]$, con $a<b$, ambos finitos, teniéndose que $\left\{\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{i\frac{2\pi nx}{b-a}}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es b.o.n. para $\mathrm{L}^2([a,b])$; si, en particular, el intervalo es de longitud $b-a=2\pi$ (por ejemplo: $[-\pi,+\pi]$, $[0,2\pi]$, etc.), entonces se tiene la b.o.n. del apartado anterior.

- También es posible elegir una b.o.n. de senos y cosenos:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{|b-a|}}, \sqrt{\frac{2}{|b-a|}}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi nx}{|b-a|}, \sqrt{\frac{2}{|b-a|}}\cos\frac{2\pi nx}{|b-a|}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$ es b.o.n. de $\mathrm{L}^2([a,b])$ y

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sen}nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\}_{n=1}^{+\infty}$$ es b.o.n. de cualquier intervalo con $|b-a| = 2\pi$.

Nota: La serie de Fourier de f (desarrollo en la base de Fourier) converge a f en norma, pero no necesariamente punto a punto
(*cf.* Abellanas y Galindo, p. 113).

Nota (teorema de Dirichlet): Dada $f \in L^2_{\mathbb{k}}([a,b])$, bien de variación acotada en $[a,b]$ (es decir, cumple que $\forall$ partición π de $[a,b]$, $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $\exists\, M \geq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$; toda función continua en $[a,b]$ y con derivada acotada en (a,b) lo es), bien acotada y monótona a trozos en $[a,b]$ $\Rightarrow$ la serie de Fourier converge puntualmente en $[a,b]$ al valor (*cf.* Abellanas y Martínez, p. 117):

1) $f(x)$ si f es continua en x, $\forall x \in\ ]a,b[$;

2) $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ $\forall x$ / $\exists\, f(x\pm 0) = \lim_{\varepsilon \to \downarrow 0} f(x \pm \varepsilon)$;

y 3) $\frac{1}{2}[f(a+0) + f(b-0)]$, $x = a, b$ / $\exists\, f(a+0)$, $f(b-0)$.

Tablas

Espacio de Hilbert separable ($\mathcal{H}$)	Boreliano (B) Func. peso $\omega(x)$	Conjunto lin. indep. a ortonormalizar en $L^2(B)$	Base ortonormal $\{e_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ numerable en $L^2_\omega(B)$	Relación de ortonormalización en $L^2_\omega(B)$ $\int_B e_n^{\omega *}(x) e_m^\omega(x)\omega(x)dx = \delta_{nm}$	Base ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ en $L^2(B)$ $\int_B e_n^*(x)e_m(x)dx = \delta_{nm}$
$\mathcal{H} = L^2[-1,1]$	$B = [-1,1]$	$\{x^n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}$	$e_n^\omega = \sqrt{n+1/2}P_n(x)$	$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$	$e_n(x) = \sqrt{n+1/2}P_n(x)$
	$\omega(x) = 1$		$P_n(x) \equiv$ polinomio de Legendre $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$	$P_0(x) = 1, \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$ $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$	
$\mathcal{H} = L^2[0,\infty]$	$B = [0,\infty]$	$\{x^n e^{-x/2}\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}$	$e_n^\omega = L_n(x)$	$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = \delta_{n,m}$	$e_n(x) = e^{-x/2}L_n(x)$
	$\omega(x) = e^{-x}$		$L_n(x) \equiv$ polinomio de Laguerre $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$	$L_0 = 1, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n \geq 1$ $x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$	
$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$	$B = \mathbb{R}$	$\{x^n e^{-x^2/2}\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}$	$e_n^\omega = \frac{1}{(n!2^n\sqrt{\pi})^{1/2}}H_n(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n,m}$	$e_n(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{(n!2^n\sqrt{\pi})^{1/2}}H_n(x)$
	$\omega(x) = e^{-x^2}$		$H_n(x) \equiv$ polinomio de Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$	$H_0(x) = 1, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1$ $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x), \quad \frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$	
$\mathcal{H} = L^2([a,b])$	$B = [a,b]$	$\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty = \{\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi kx}{b-a}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi kx}{b-a}\}_{k=1}^{+\infty}$	
$b - a = 2\pi$	$\omega(x) = 1$	$\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos kx, \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin kx\}_{k=1}^{+\infty}$	

Convergencia en norma $\forall f \in \mathcal{H} : f = \sum_n \langle e_n, f\rangle\, e_n \Leftrightarrow lim_{n\to\infty}||f - \sum_{n=0}^m \langle e_n, f\rangle\, e_n|| = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in N : \int_B |f(x) - \sum_{n=0}^{m(\epsilon)}\langle e_n, f\rangle\, e_n|^2 dx < \epsilon^2$ con $\{e_n\}_{n=0}^\infty \equiv$ b.o.n. de $\mathcal{H}$

$\mathcal{H} = L^2(B) \quad \Rightarrow \quad \int_B |f(x)|^2dx = ||f||^2 = \sum_n |\langle e_n, f\rangle|^2$ con $\langle e_n, f\rangle = \int_B e_n^*(x)f(x)dx$

$f = g\,\omega^{1/2} \in L^2(B) \Leftrightarrow g = f\,\omega^{-1/2} \in L^2_\omega(B)$

TABLA 1 (general)

$$f = g\,\omega^{\frac{1}{2}} \in L^2(B) \Leftrightarrow g = f\,\omega^{-\frac{1}{2}} \in L^2_\omega(B)$$

TABLA 1 (general: aparecen $L^2(B)$ y $L^2_\omega(B)$)

Espacio de Hilbert separable ($\mathcal{H}$)	Boreliano (B) Func. peso $\omega(x)$	Conjunto lin. indep. a ortonormalizar en $L^2(B)$	Base ortonormal $\{e_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ numerable en $L^2_\omega(B)$	Relación de ortonormalización en $L^2_\omega(B)$ $\int_B e_n^{\omega *}(x)e_m^\omega(x)\omega(x)dx=\delta_{nm}$	Base ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ en $L^2(B)$ $\int_B e_n^*(x)e_m(x)dx=\delta_{nm}$
$\mathcal{H}=L^2[-1,1]$	$B=[-1,1]$	$\{x^n\}_{n=0}^\infty\subset\mathcal{H}$	$e_n^\omega=\sqrt{n+1/2}P_n(x)$	$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$	$e_n(x)=\sqrt{n+1/2}P_n(x)$
	$\omega(x)=1$		$P_n(x)\equiv$ polinomio de Legendre	$P_0(x)=1,\quad (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\quad n\geq 1$	
			$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$	$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x),\quad (1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+n(n+1)P_n(x)=0$	
$\mathcal{H}=L^2[0,\infty]$	$B=[0,\infty]$	$\{x^ne^{-x/2}\}_{n=0}^\infty\subset\mathcal{H}$	$e_n^\omega=L_n(x)$	$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=\delta_{n,m}$	$e_n(x)=e^{-x/2}L_n(x)$
	$\omega(x)=e^{-x}$		$L_n(x)\equiv$ polinomio de Laguerre	$L_0=1,\quad (n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x),\quad n\geq 1$	
			$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$	$x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2}+(1-x)\frac{dL_n(x)}{dx}+nL_n(x)=0$	
$\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$	$B=\mathbb{R}$	$\{x^ne^{-x^2/2}\}_{n=0}^\infty\subset\mathcal{H}$	$e_n^\omega=\frac{1}{(n!2^n\sqrt{\pi})^{1/2}}H_n(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=\sqrt{\pi}2^nn!\delta_{n,m}$	$e_n(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{(n!2^n\sqrt{\pi})^{1/2}}H_n(x)$
	$\omega(x)=e^{-x^2}$		$H_n(x)\equiv$ polinomio de Hermite	$H_0(x)=1,\quad H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),\quad n\geq 1$	
			$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$	$H_n(x)=(-1)^nH_n(-x),\qquad \frac{d^2H_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dH_n(x)}{dx}+2nH_n(x)=0$	
$\mathcal{H}=L^2([a,b])$	$B=[a,b]$	$\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{+\infty}=\{\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty=\{\frac{1}{\sqrt{b-a}},\quad\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi kx}{b-a},\quad\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi kx}{b-a}\}_{k=1}^{+\infty}$	
$b-a=2\pi$	$\omega(x)=1$	$\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{+\infty}=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos kx,\quad\sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin kx\}_{k=1}^{+\infty}$	

Convergencia en norma $\forall f\in\mathcal{H}: f=\sum_n\langle e_n,f\rangle\, e_n\Leftrightarrow lim_{n\to\infty}||f-\sum_{n=0}^m\langle e_n,f\rangle\, e_n||=0\Leftrightarrow\forall\epsilon>0\quad\exists m\in N:\int_B|f(x)-\sum_{n=0}^{m(\epsilon)}\langle e_n,f\rangle\, e_n|^2dx<\epsilon^2$ con $\{e_n\}_{n=0}^\infty\equiv$ b.o.n. de $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}=L^2(B)\quad\Rightarrow\quad\int_B|f(x)|^2dx=||f||^2=\sum_n|\langle e_n,f\rangle|^2$ con $\langle e_n,f\rangle=\int_B e_n^*(x)f(x)dx$

$f=g\,\omega^{1/2}\in L^2(B)\Leftrightarrow g=f\,\omega^{-1/2}\in L^2_\omega(B)$

TABLA 1 (general)

Espacio de Hilbert separable ($\mathcal{H}$)	Boreliano (B)	Conjunto lin. indep. a ortonormalizar en $L^2(B)$	Base ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $L^2(B)$	Relación de ortonormalización en $L^2(B)$	Relación de recurrencia
$\mathcal{H} = L^2[-1,1]$	$B = [-1,1]$	$\{x^n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$	$e_n = \sqrt{n+1/2}P_n(x)$	$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$	
			$P_n(x) \equiv$ polinomio de Legendre	$P_0(x) = 1, \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$	
			$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$	$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$	
$\mathcal{H} = L^2[0,\infty]$	$B = [0,\infty]$	$\{x^n e^{-x/2}\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$	$e_n = e^{-x/2}L_n(x)$	$\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = \delta_{n,m}$	
			$L_n(x) \equiv$ polinomio de Laguerre	$L_0 = 1, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n \geq 1$	
			$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$	$x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$	
$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$	$B = \mathbb{R}$	$\{x^n e^{-x^2/2}\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$	$e_n = \frac{e^{-x^2/2}}{(n!2^n\sqrt{\pi})^{1/2}}H_n(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n,m}$	
			$H_n(x) \equiv$ polinomio de Hermite	$H_0(x) = 1, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1$	
			$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$	$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x), \qquad \frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$	
$\mathcal{H} = L^2([a,b])$	$B = [a,b]$	$\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi kx}{b-a}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi kx}{b-a}\}_{k=1}^{+\infty}$	
$b - a = 2\pi$		$\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos kx, \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin kx\}_{k=1}^{+\infty}$	

Convergencia en norma $\forall f \in \mathcal{H} : f = \sum_n \langle e_n, f\rangle\, e_n \Leftrightarrow lim_{n\to\infty}\|f - \sum_{n=0}^{m}\langle e_n, f\rangle\, e_n\| = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \quad \exists m \in N : \int_B |f(x) - \sum_{n=0}^{m(\epsilon)}\langle e_n, f\rangle\, e_n|^2 dx < \epsilon^2$ con $\{e_n\}_{n=0}^{\infty} \equiv$ b.o.n. de $\mathcal{H}$

$\mathcal{H} = L^2(B) \quad \Rightarrow \quad \int_B |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 = \sum_n |\langle e_n, f\rangle|^2$ con $\langle e_n, f\rangle = \int_B e_n^*(x)f(x)dx$

$f \in L^2(B) \Leftrightarrow f\omega^{-1/2} \in L^2_{\omega}(B)$

TABLA 2 (sin función peso explícita)

Espacio de Hilbert separable ($\mathcal{H}_\omega$)	Boreliano (B) Func. peso $\omega(x)$	Conjunto lin. indep. a ortonormalizar en $L^2_\omega(B)$;	Base ortonormal $\{e^\omega_n\}_{n=0}^\infty$ numerable en $L^2_\omega(B)$	Relación de ortonormalización en $L^2_\omega(B)$: $\int_B e^{\omega *}_n(x) e^\omega_m(x)\omega(x)dx = \delta_{nm}$	Relación de recurrencia y ecuación diferencial
$\mathcal{H}_\omega = L^2_\omega[-1,1]$	$B = [-1,1]$	$\{x^n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}_\omega$	$e^\omega_n = \sqrt{n+1/2}P_n(x)$	$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$	
	$\omega(x) = 1$		$P_n(x) \equiv$ polinomio de Legendre $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$	$P_0(x) = 1, \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$ $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$	
$\mathcal{H}_\omega = L^2_\omega[0,\infty]$	$B = [0,\infty]$	$\{x^n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}_\omega$	$e^\omega_n = L_n(x)$	$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = \delta_{n,m}$	
	$\omega(x) = e^{-x}$		$L_n(x) \equiv$ polinomio de Laguerre $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$	$L_0 = 1, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n \geq 1$ $x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$	
$\mathcal{H}_\omega = L^2_\omega(\mathbb{R})$	$B = \mathbb{R}$	$\{x^n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}_\omega$	$e^\omega_n = \frac{1}{(n!2^n\sqrt{\pi})^{1/2}}H_n(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n,m}$	
	$\omega(x) = e^{-x^2}$		$H_n(x) \equiv$ polinomio de Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$	$H_0(x) = 1, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1$ $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x), \quad \frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$	
$\mathcal{H}_\omega = L^2_\omega([a,b])$	$B = [a,b]$	$\{e^{(1)}_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e^{(2)}_n\}_{n=0}^\infty = \{\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi kx}{b-a}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi kx}{b-a}\}_{k=1}^{+\infty}$	
$b - a = 2\pi$	$\omega(x) = 1$	$\{e^{(1)}_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$		$\{e^{(2)}_n\}_{n=0}^\infty = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos kx, \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin kx\}_{k=1}^{+\infty}$	

Convergencia en norma $\forall g \in \mathcal{H}_\omega : g = \sum_n \langle e^\omega_n, g\rangle_\omega \, e^\omega_n \Leftrightarrow lim_{n\to\infty}||g - \sum_{n=0}^m \langle e^\omega_n, g\rangle_\omega \, e^\omega_n||_\omega = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \quad \exists m \in N : \int_B |g(x) - \sum_{n=0}^{m(\epsilon)}\langle e^\omega_n, g\rangle_\omega \, e^\omega_n|^2 dx < \epsilon^2$ con $\{e^\omega_n\}_{n=0}^\infty \equiv$ b.o.n. de $\mathcal{H}_\omega$

$\mathcal{H}_\omega = L^2_\omega(B)\ ,\ g \in L^2_\omega(B) \quad \Rightarrow \quad \int_B |g(x)|^2\,\omega(x)\,dx = ||g||^2_\omega = \sum_n |\langle e^\omega_n, g\rangle_\omega|^2$ con $\langle e^\omega_n, g\rangle_\omega = \int_B e^{\omega *}_n(x) g(x)\,\omega(x)\,dx$

$g = f\,w^{-1/2} \in L^2_\omega(B) \Leftrightarrow f = g\,\omega^{1/2} \in L^2(B)$

TABLA 3 (sólo con función peso)

TABLA 3 (sólo con función peso) © tablas M.C. Boscá y E. Romera, Univ. de Granada.