MÉTODOS MATEMÁTICOS

ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Profesora: Mª Cruz Boscá

TEMA 4: OPERADORES LINEALES

◈ ***Notación:*** sean $L_1 \equiv (L_1, \|\cdot\|_1)$ y $L_2 \equiv (L_2, \|\cdot\|_2)$ dos espacios normados; sea T un operador lineal $T: D(T_1) < L_1 \to L_2$, de recorrido $R(T) < L_2$; sea $\mathcal{L}(L)$ el espacio lineal constituido por todos los operadores T con dominio $D(T) = L$ y recorrido $R(T) < L$, y sea H un espacio de Hilbert.

▶ **Lema:** $\forall D \mid \overline{D} = H$ se tiene $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in D \Rightarrow x = 0$.

▶ **Lema:** Dado $T \in \mathcal{L}(L)$, L pre-Hilbert, $\mathbb{k} = \mathbb{C} \Rightarrow$ ($T = 0 \Leftrightarrow \langle x, Tx \rangle = 0 \ \ \forall x \in L$).

▶ **Lema:** Dados $T_i \in \mathcal{L}(L)$, $i = 1, 2$, L pre-Hilbert, $\mathbb{k} = \mathbb{C} \Rightarrow$

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow \langle x, T_1 x \rangle = \langle x, T_2 x \rangle \ \ \forall x \in L.$$

■ Aplicaciones lineales entre espacios lineales

⌖ Una aplicación T con dominio $D(T)$ y recorrido $R(T)$, $T: D(T) \subset L_1 \to R(T) \subset L_2$, es *aplicación lineal* u *operador lineal* del espacio lineal L_1 sobre el espacio lineal L_2, ambos sobre el cuerpo común Λ, sii satisface:

a) $D(T) < L_1$

b) T es univaluada: $\forall x \in D(T) \ \exists! y \in R(T) \ : \ T(x) = y$ (*notación*: $y = Tx$),

c) $\forall x, y \in D(T), \ \forall \alpha, \beta \in \Lambda \ : \ T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

● Denominación: *aplicación lineal ≡ operador lineal ≡ homomorfismo*.

⌖ Una aplicación T con dominio $D(T)$ y recorrido $R(T)$, $T: D(T) \subset L_1 \to R(T) \subset L_2$, es *aplicación antilineal* u *operador antilineal* del espacio lineal L_1 sobre el espacio lineal L_2, ambos sobre el cuerpo común $\Lambda = \mathbb{C}$, sii satisface:

a) $D(T) < L_1$

b) T es univaluada: $\forall x \in D(T) \ \exists! y \in R(T) \ : \ T(x) = y$ (*notación*: $y = Tx$),

c) $\forall x, y \in D(T), \ \forall \alpha, \beta \in \Lambda \ : \ T(\alpha x + \beta y) = \alpha^* T(x) + \beta^* T(y)$.

Propiedades:

Dada una aplicación lineal $T : D(T) < L_1 \to R(T) \subset L_2$, se tiene:

a) $R(T) < L_2$

b) $T(\overrightarrow{0_1}) = \overrightarrow{0_2}$ ($\overrightarrow{0_i}$ es elemento neutro de la ley $(+)$ en L_i, $i = 1, 2$)

c) $T(-x) = -T(x) \ \ \forall x \in D(T)$

d) $\ker T = \left\{ x \in D(T) \ : \ Tx = \overrightarrow{0_2} \right\} < L_1$ (*núcleo* o *kernel* del operador)

e) Si $D(T) = L_1$ y $\dim L_1$ es finita**:** $\dim D(T) = \dim \ker T + \dim R(T)$, denominándose *nulidad* de T a la $\dim \ker T$ y *rango* de T a la $\dim R(T)$.

Gráfico de un operador lineal

Dada una aplicación lineal $T : D(T) \subset L_1 \to R(T) \subset L_2$, se define su gráfico $\Gamma(T)$ como

$\Gamma(T) = \left\{ (x_1, x_2) \in L_1 \times L_2 \ : \ x_1 \in D(T), \ x_2 = Tx_1 \in R(T) \right\} \subset L_1 \times L_2$.

$\Gamma(T) < L_1 \oplus L_2$

Teorema del gráfico: Un subespacio lineal $\Gamma(T) < L_1 \oplus L_2$ es gráfico de algún operador lineal entre L_1 y L_2 $\Leftrightarrow$ $((\overrightarrow{0_1}, y) \in \Gamma \Rightarrow y = \overrightarrow{0_2})$ (esto es, si Γ corta al eje L_2, lo hace sólo en el origen).

Igualdad entre operadores lineales: Dados dos operadores lineales T_1 y T_2, son *iguales* $\Leftrightarrow$ $\Gamma(T_1) = \Gamma(T_2)$ $\Leftrightarrow$ $D(T_1) = D(T_2) = D(T)$ y $T_1 x = T_2 x \ \forall x \in D(T)$.

Extensiones y restricciones: Dados dos operadores lineales T_1 y T_2, tales que $D(T_1) \subset D(T_2)$ y $T_1 x = T_2 x \ \forall x \in D(T_1)$, entonces T_2 es una *extensión* de T_1 a $D(T_2)$, y T_1 es una *restricción* de T_2 a $D(T_1)$.

Notación:

- $T_2 \supset T_1$ »» T_2 es una extensión de T_1.
- $T_1 \subset T_2$ »» T_1 es una restricción de T_2.

Operador lineal inverso

Dado un operador lineal $T : D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$ la *relación inversa* $T^{(-1)}$ se define según:

$T^{(-1)} : D(T^{(-1)}) = R(T) \to R(T^{(-1)}) = D(T)$ tal que $\forall y \in D(T^{-1})$ se tiene $T^{(-1)} y = x$ con $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

- En general, $T^{(-1)}$ no tiene por qué ser un operador (i.e.: no tiene por qué ser univaluada).

▶ Dado un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$ la relación inversa $T^{(-1)}$ es un operador lineal $T^{-1}: D(T^{-1}) = R(T) < L_2 \to R(T^{-1}) = D(T) < L_1 \Leftrightarrow T$ es un operador inyectivo $\Leftrightarrow$ $[(Tx_1 = Tx_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$ $\Leftrightarrow$ $[Tx = 0_2 \Rightarrow x = 0_1]$, i.e.: $\ker T = \{0_1\}$.

⊕ Dado un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$, T se define como operador no singular $\Leftrightarrow$ $\exists T^{-1}$ operador lineal.

▶ Dado un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$ no singular $\Rightarrow$

- $\exists\, T^{-1}T \equiv I_D \; : D(T) \to D(T) \;/\; T^{-1}Tx = x \;\; \forall x \in D(T)$
- $\exists\, TT^{-1} \equiv I_R : R(T) \to R(T) \;/\; TT^{-1}y = y \;\; \forall y \in R(T)$

⊕ Dado un operador lineal $T: D(T) < L \to R(T) < L$, T se define como operador invertible $\Leftrightarrow$ $D(T) = R(T) = L$ y T es no singular $\Leftrightarrow$ $\exists\, T, T^{-1}$, operadores lineales, y $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

⊕ Dados dos operadores lineales $T_i: D(T_i) < L_1 \to R(T_i) < L_2$, $i = 1,2$, tales que $D(T_1) \subset D(T_2)$ y $T_2(x) = T_1(x)$ $\forall x \in D(T_1)$, se dice que T_2 es una *extensión* de T_1 a $D(T_2)$ y que T_1 es una *restricción* de T_2 a $D(T_1)$, simbolizándose $T_1 \supset T_2$.

Operadores lineales acotados y continuos

Operador lineal continuo/acotado ($\in \mathcal{A}$)

⊕ Dados dos espacios normados L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, un operador lineal $A: D(A) < L_1 \to R(A) < L_2$ es *continuo en* $x \in D(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(x,\varepsilon) > 0 \;\; / \;\; \|A(x) - A(y)\|_2 < \varepsilon \;\; \forall y \in D(A)$ tal que $\|x - y\|_1 < \delta$

$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ se tiene que $x_n \to x \;\; \Rightarrow \;\; A(x_n) \to A(x)$.

⊕ Un operador lineal $A: D(A) < L_1 \to L_2$ es *continuo* si lo es $\forall x \in D(A)$.

⊕ Dados dos espacios normados L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, un operador lineal $A: D(A) < L_1 \to R(A) < L_2$ es *acotado* $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ *finito*, $k \geq 0$ / $\|Ax\|_2 \leq k \|x\|_1 \;\; \forall x \in D(A)$.

⊕ -Nota: Obsérvese que $K_{\min} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$ es el menor valor de k para el que se verifica la anterior desigualdad para todo operador lineal acotado.

▶ Dados dos espacios normados L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$, un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$ es *continuo* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ es continuo en un punto de su dominio (cualquiera)
$\Leftrightarrow$ es continuo en $x = 0$
$\Leftrightarrow$ es acotado.

▶ La suma, el producto por un escalar y la composición de operadores lineales continuos dan como resultado otro operador lineal continuo.

Norma de un operador lineal acotado

Definición: Dados dos espacios normados L_1 y L_2 sobre el mismo cuerpo $\mathbb{k}$ y un operador **lineal acotado** $A: D(A) < L_1 \to R(A) < L_2$, se define la *norma del operador*, $\|A\| \in \mathbb{R},\ \|A\| \geq 0$, según

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|_1 \neq 0 \\ x \in D(A)}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} .$$

▶ $\|Ax\|_2 \leq \|A\|\ \|x\|_1 \quad \forall x \in D(A)$.

▶ Teorema: Definiciones equivalentes para la norma de un operador (¡lineal acotado!):

a) $\|A\| = \inf \left\{ k \in \mathbb{R},\ k \geq 0 \quad / \quad \|Ax\|_2 \leq k \|x\|_1 \quad \forall x \in D(A) \right\}$

b) $\displaystyle\sup_{\substack{0 < \|x\|_1 \leq 1 \\ x \in D(A)}} \|Ax\|_2$ c) $\displaystyle\sup_{\substack{\|x\|_1 \leq 1 \\ x \in D(A),\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$ d) $\displaystyle\sup_{\substack{\|x\|_1 = 1 \\ x \in D(A)}} \|Ax\|_2$.

Propiedades

▶ $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ es un espacio lineal normado (cuerpo $\mathbb{k}$).

▶ $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ con L_2 espacio de Banach es un espacio de Banach.

▶ $\mathcal{A}(L_1, L_2) = \mathcal{L}_C(L_1, L_2) \neq \mathcal{L}(L_1, L_2)$.

▶ $\mathcal{A}(L_n, L) = \mathcal{L}_C(L_n, L) = \mathcal{L}(L_n, L)$.

▶ En $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ la suma (de elementos de $\mathcal{A}$, esto es, de operadores lineales acotados), el producto por un escalar y el producto de operadores son también elementos del espacio (o sea, operadores lineales continuos).
-Por ejemplo: $A_n \to A,\ B_n \to B,\ \alpha_n \to \alpha \Rightarrow A_n + B_n \to A + B,\ \alpha_n A_n \to \alpha A,\ A_n B_n \to AB$.

▶ Dados $A_1 \in \mathcal{A}(L_1, L_2)$ y $A_2 \in \mathcal{A}(L_2, L_3)$, entonces A_i^n es acotado, $\|A_i^n\| \leq \|A_i\|^n$; $A_2 A_1 \in \mathcal{A}(L_1, L_3)$ y $\|A_2 A_1\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|$.
-Nota: la última propiedad permitirá que $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H, H)$, $H \equiv$ espacio de Hilbert (y, por tanto, espacio completo), constituya un álgebra de Banach.

▶ El espacio Banach $\mathcal{A}(H) \equiv \mathcal{A}(H,H)$ con $\dim H > 1$ no es espacio euclídeo (*i.e.*: la norma no cumple la ley del paralelogramo, o sea, no deriva de un producto escalar).

Teoremas del operador inverso acotado:

▶ Dado un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to R(T) < L_2$, $L_2 \neq \{0_2\}$, entonces $\exists\, T^{-1}$ operador lineal acotado $\Leftrightarrow$ $\exists\, k > 0 \,:\, \|Tx\|_2 \geq k\|x\|_1 \;\forall\, x \in D(T)$.

▶ Dado un operador lineal acotado biyectivo $A: L_1 \to L_2$, con L_1 y L_2 Banach, entonces $\exists\, A^{-1}$ y es operador lineal acotado.

Representación matricial:

• Todo operador lineal acotado $A \in \mathcal{A}(H)$ con H espacio de Hilbert separable, admite representación como una matriz cuadrada de elementos $A_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle$, siendo $\{e_i\}_{i\in I}$, $card\ I \leq \aleph_0$, una base ortonormal numerable de H y teniéndose $\forall x \in H$, $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, que

$$Ax = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in I} A_{ij}\alpha_j\right)e_i\,,$$

esto es,

$$(Ax)_i = \sum_{j\in I} A_{ij}\alpha_j\,.$$

Operadores cerrados

Definiciones y teoremas

⊕ Un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to L_2$ se define como *cerrado* $\Leftrightarrow$ su gráfico $\eta(T) = \{(x,y) \in L_1 \times L_2 \;:\; x \in D(T),\ y = Tx\} < L_1 \oplus L_2$ es cerrado (*i.e.*: $\eta(T) = \overline{\eta(T)} \lhd L_1 \oplus L_2$; recordar que $L_1 \oplus L_2$ es el espacio suma directa externa de L_1 y L_2, donde se ha definido la norma $\|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$; dado $S < L_1 \oplus L_2$, S es gráfico de un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to L_2$ $\Leftrightarrow$ ($(0,y) \in S \Rightarrow y = 0$); además, si L_1 y L_2 son Banach, entonces $L_1 \oplus L_2$ es Banach).

▶ Un operador $T: D(T) < L_1 \to L_2$ es cerrado $\Leftrightarrow$ $(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T),\ x_n \to x,\ Tx_n \to y) \;\Rightarrow\; (x \in D(T),\ y = Tx)$

▶ Dado un operador lineal acotado $A: D(A) < L_1 \to L_2$, entonces $\Rightarrow$

- Si $D(A) = \overline{D(A)}$, entonces A es cerrado, y
- Si A es cerrado y L_2 es Banach, entonces $D(A) = \overline{D(A)}$.

▶ Dado un operador lineal acotado $A \in \mathcal{A}(D(A), H)$, A es cerrado $\Leftrightarrow$ $D(A) = \overline{D(A)}$.

▶ ***Teorema del gráfico cerrado:***
Dados dos espacios Banach L_1, L_2 y un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to L_2$, con $D(T) = \overline{D(T)}$, entonces $\Rightarrow (T$ es operador cerrado $\Leftrightarrow$ T es operador acotado).

⌖ Un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to L_2$ se define como *cerrable* o *clausurable* $\Leftrightarrow$ posee extensión $T_{ext}^c \supseteq T$ cerrada
($i.e.$: $\exists\, T_{ext}^c : D(T_{ext}^c) < L_1 \to L_2 \;:\; D(T_{ext}^c) \supseteq D(T),\; T_{ext}^c x = Tx \;\; \forall x \in D(T)$ y T_{ext}^c es operador cerrado).

▶ Si T es cerrado, es cerrable ($e.g.$: $T_{ext}^c = T$).

▶ T es cerrable $\Leftrightarrow$ $\overline{\eta(T)}$ no posee puntos $(0, y)$ con $y \neq 0$ $\Leftrightarrow$
$[(\{x_n\}_{n\in N} \subset D(T),\; x_n \to 0,\; Tx_n \to y) \;\Rightarrow\; y = 0] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \{x_n\}_{n\in N} \subset D(T),\; x_n \to x,\; \{Tx_n\} \to z_1 \\ \{y_n\}_{n\in N} \subset D(T),\; y_n \to x,\; \{Ty_n\} \to z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = z_2 .$$

▶ Dado T operador cerrado o acotado, y no singular $\Rightarrow$ T^{-1} es operador cerrado.

Clausura de un operador

⌖ Dado un operador cerrado o cerrable $T: D(T) < L_1 \to L_2$, se define su *cierre* o *clausura* $\overline{T}$ como su extensión cerrada minimal, i.e., la extensión cerrada del mismo tal que, dada cualquier otra extensión cerrada T_{ext}^c de él, se tiene $\eta(\overline{T}) \subset \eta(T_{ext}^c)$.

▶ Dado T operador cerrado $\Rightarrow$ $\overline{T} = T$.

▶ Dado un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to L_2$, operador no cerrado pero clausurable, entonces $\Rightarrow$
- T posee clausura $\overline{T}$,
- $\eta(\overline{T}) = \overline{\eta(T)}$,
- $D(T) \subset D\left(\overline{T}\right) \subset \overline{D(T)}$.

Nota: Existen operadores lineales $T: D(T) < L_1 \to L_2$ que son:
- Cerrados pero no acotados ($e.g.$: el operador diferencial, ver Vera p. 192).
- Acotados pero no cerrados ($e.g.$: el operador identidad $I_D, D \subsetneq L$, ver Vera p. 192).
- Ni cerrados ni acotados.

Extensión de operadores lineales acotados

***Teorema de extensión de un operador lineal acotado con recorrido en un Banach*:**

Dado un operador lineal acotado $A: D(A) < L_1 \to L_2$, con L_2 espacio de Banach, entonces $\Rightarrow \exists!\ \mathrm{A}_{ext}: D(A_{ext}) = \overline{D(A)} \lhd L_1 \to L_2$, operador lineal acotado tal que:

- $A_{ext} \supset A$, i.e.: $A_{ext}x = Ax\ \forall x \in D(A)$ y $\eta(A_{ext}) \supset \eta(A)$
- $D(A_{ext}) = \overline{D(A)}$
- $\forall\, x \in \overline{D(A)}$: $\mathrm{A}_{ext}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ con $\{x_n\} \subset D(A)$ y $x_n \to x$
- $\|A_{ext}\| = \|A\|$ y $A_{ext} = \overline{A}$.

Todo operador lineal acotado con dominio de definición denso en el correspondiente espacio normado y recorrido en un Banach puede extenderse a todo el espacio conservando su norma.

Dado $A: D(A) < H \to H$, operador lineal acotado con dominio y recorrido sobre un Hilbert, entonces $\Rightarrow$ existen unas extensiones acotadas $\overline{A}$ de A a $\overline{D(A)}$, $\overline{A}: D(\overline{A}) = \overline{D(A)} \lhd H \to H$, única, y A_H de A a todo el espacio, $A_H: D(A_H) = H \to H$, no única en general, tales que:

- $\overline{A} \supset A$, *i.e.*: $\overline{A}x = Ax\ \forall x \in D(A)$; $\eta(\overline{A}) \supset \eta(A)$; $D(\overline{A}) = \overline{D(A)} \supset D(A)$ y $\forall\, x \in \overline{D(A)}$: $\overline{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ con $\{x_n\} \subset D(A)$ y $x_n \to x$.
- $A_H \supset \overline{A}$, *i.e.*: $A_H x = \overline{A}x\ \forall x \in D(\overline{A})$; $\eta(A_H) \supset \eta(\overline{A})$; $D(A_H) \supset D(\overline{A})$ y, puesto que $\forall x \in H$: $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \overline{D(A)}$, $x_2 \in \left(\overline{D(A)}\right)^\perp$, entonces $\forall x \in H \setminus D(\overline{A})$: $A_H x = \overline{A}x_1 + A_\perp x_2$, siendo $A_\perp \in \mathcal{A}((\overline{D(A)})^\perp, H)$ (*i.e.*: un operador lineal acotado con dominio $D(A_\perp) = \left(\overline{D(A)}\right)^\perp$).
- $\|A_H\| \geq \|\overline{A}\| = \|A\|$ ($\|A_H\| = \|\overline{A}\| = \|A\|$ cuando $A_\perp = 0$).

Todo operador lineal acotado con dominio y recorrido en un Hilbert puede extenderse a todo el espacio; por tanto, en el estudio de un operador continuo A sobre un H puede suponerse siempre que el operador $A \in \mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H, H)$ (aunque su extensión, en general, no es única si $\overline{D(A)} \neq H$).

■ *Teorema de representación de Riesz o de Riesz-Fréchet:*

▶ Dado un espacio de Hilbert H, entonces un funcional lineal $F \in H^* \Leftrightarrow \exists!\ g \in H \ /\ F(x) = \langle g, x \rangle\ \forall x \in H$, teniéndose $\|F\| = \|g\|$ (g se denomina el vector "generador" del funcional F, H^* representa el espacio dual del H^*, véase tema 5).

■ Adjunto de un operador

⌖ Dado un operador lineal acotado $A \in \mathcal{A}(H)$ se define su *operador adjunto* A^+ como el operador lineal $A^+ : H \to H$ tal que $\langle A^+ x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle\ \ \forall x, y \in H$.

▶ $\forall A \in \mathcal{A}(H)\ \exists!\ A^+ \in \mathcal{A}(H)$ (demostración: requiere el teorema de Riesz).

▶ El concepto de operador adjunto generaliza el de matriz adjunta, pues si, como vimos, todo operador lineal acotado $A \in \mathcal{A}(H)$, con H espacio de Hilbert separable, admite representación como una matriz cuadrada de elementos $A_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle$, siendo $\{e_i\}_{i \in I}$, $\operatorname{card} I \le \aleph_0$, una base ortonormal numerable de H, entonces se tiene que la matriz asociada al operador adjunto A^+ es la transpuesta de la conjugada de la matriz de A: $A^+_{ij} = (A_{ji})^*$.

▶ Propiedades: $\forall A, A_n \in \mathcal{A}(H)$, se tiene

- $A \in \mathcal{A}(H) \ \Leftrightarrow\ A^+ \in \mathcal{A}(H)$.
- $A^{++} = A$ y A^+ es cerrado.
- $\|A^+\| = \|A\|$; $(\alpha A)^+ = \alpha^* A^+\ \forall \alpha \in \mathbb{k}$.
- $(A_1 + A_2)^+ = A_1^+ + A_2^+$; $(A_1 A_2)^+ = A_2^+ A_1^+$.
- $\|A^+\| = \|A\|$; $\|A^+ A\| = \|AA^+\| = \|A\|^2$.
- Si A es invertible, $A^{-1} \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow A^+$ invertible, $(A^+)^{-1} \in \mathcal{A}(H)$ y $(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$.
- $\ker A^+ = (R(A))^\perp$ y $\ker A = (R(A^+))^\perp$; $H = R(A) \oplus \ker A^+$.

⌖ Dado un operador lineal $T : D(T) < H \to H$, se denomina *operador adjunto* de T, símbolo T^+, al operador lineal $T^+ : D(T^+) < H \to H$ definido:
1) $D(T^+) = \{x \in H \ /\ \exists! g \in H : \langle x, Ty \rangle = \langle g, y \rangle\ \forall y \in D(T)\} \ne \varnothing$,
2) $x \mapsto T^+ x = g\ \ \forall x \in D(T^+)$.

▶ $\forall T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$, $\exists! T^+ \in \mathcal{L}(D(T^+) < H, H) \ \Leftrightarrow\ \overline{D(T)} = H$.

▶ Propiedades: Sea $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ con $\overline{D(T)} = H$ (en particular, $\forall A \in \mathcal{A}(H)$), entonces:

- $\exists! T^+ \in \mathcal{L}(D(T^+) < H, H)$ y es cerrado.
- Si T es cerrado $\Rightarrow \overline{D(T^+)} = H \ \Rightarrow\ \exists T^{++} = T$.
- $\overline{D(T^+)} = H \ \Leftrightarrow\ T$ es cerrable.
- Si $\overline{D(T^+)} = H \ \Rightarrow\ \exists T^{++} = \overline{T}$.

- Si $\exists T^{++} \Rightarrow T^{++} = \overline{T}$ y $\left(\overline{T}\right)^{+} = T^{+}$.
- Si $\exists T^{-1}$ con $\overline{D(T^{-1})} = H \Rightarrow \exists \left(T^{+}\right)^{-1}$ y $\left(T^{+}\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^{+}$.
- $\langle T^{+}x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \forall x \in D(T^{+})$, $\forall y \in D(T)$.
- $\forall T_i \in \mathcal{L}(D(T_i) < H, H)$, $\overline{D(T_i)} = H$, $i = 1,2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (T_1 \subset T_2 \Rightarrow T_2^{+} \subset T_1^{+})$; $(\alpha T_i)^{+} = \alpha^{*} T_i^{+} \ \forall \alpha \in \mathbb{k}$.
- $\forall T_i \in \mathcal{L}(D(T_i) < H, H)$, $i = 1,2$, con $\overline{D(T_i)} = \overline{D(T_1 + T_2)} = H \Rightarrow (T_1 + T_2)^{+} \supset T_1^{+} + T_2^{+}$.
- $\forall T_i \in \mathcal{L}(D(T_i) < H, H)$, $i = 1,2$, con $\overline{D(T_i)} = \overline{D(T_1 T_2)} = H \Rightarrow (T_1 T_2)^{+} \supset T_2^{+} T_1^{+}$.

Operadores hermíticos y autoadjuntos

Dado un operador lineal $T : D(T) < H \to H$ con $\overline{D(T)} = H$, se define como *operador hermítico* o *simétrico* $\Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \forall x, y \in D(T) \Leftrightarrow T \subseteq T^{+}$.

- Todo $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ hermítico es cerrable.
- $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ hermítico $\Rightarrow T \subseteq T^{++} \subseteq T^{+}$.

Dado un operador lineal $T : D(T) < H \to H$ con $\overline{D(T)} = H$, se define como *operador autoadjunto* $\Leftrightarrow T^{+} = T$.

- ***Postulado II** de la Mecánica Cuántica*: Cada observable de un sistema físico se representa en el formalismo matemático de la Mecánica Cuántica mediante un operador lineal autoadjunto que actúa en el espacio de Hilbert (H complejo, $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, y separable) del sistema físico considerado.

Dado un operador lineal $T : D(T) < H \to H$ hermítico ($\Rightarrow \overline{D(T)} = H$), se define como *operador esencialmente autoadjunto cuando posee una única extensión autoadjunta* $\Leftrightarrow \overline{T}$ es autoadjunto $\Leftrightarrow T^{+} = T^{++}$ (T^{+} es autoadjunto) $\Leftrightarrow \overline{T} = T^{+}$.

- Dado $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ hermítico ($\Rightarrow \overline{D(T)} = H$):
  - Puede poseer una, ninguna o varias extensiones autoadjuntas.
  - Si T es esencialmente autoadjunto, admite extensión propia única, $T_{ext} \supsetneq T$, autoadjunta.
  - Si T es autoadjunto, no admite extensión propia autoadjunta.

- Dado $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ autoadjunto ($\Rightarrow \overline{D(T)} = H$), entonces $T \in \mathcal{A}(D(T))$, *i.e.*, es continuo $\Leftrightarrow D(T) = H$.
- Dado $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ hermítico ($\Rightarrow \overline{D(T)} = H$) con cierre autoadjunto, es esencialmente autoadjunto.
- Dado $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ hermítico ($\Rightarrow \overline{D(T)} = H$):
  - T es autoadjunto $\Leftrightarrow R(T + iI) = R(T - iI) = H$.
  - T es esencialmente autoadjunto $\Leftrightarrow \overline{R(T \pm iI)} = H \Leftrightarrow \ker(T^{+} \pm iI) = \{0\}$.

- T es autoadjunto $\Leftrightarrow$ (T cerrado y $\ker(T^+ \pm iI) = \{0\}$).

▶ Bloque 1 de propiedades: Sea $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ con $\overline{D(T)} = H$, entonces:

- Si T hermítico $\Rightarrow$ (T es cerrable, $\exists T^{++} = \overline{T}$, $T \subset T^{++} \subset T^+$).
- Si T hermítico y $T = T^{++} \subsetneq T^+$ $\Rightarrow T$ es cerrado y no es autoadjunto.
- Si T hermítico y $T \subsetneq T^{++} = T^+$ $\Rightarrow T$ tiene cierre autoadjunto (es esencialmente autoadjunto) y no es autoadjunto.
- Si T hermítico y cerrado $\Rightarrow T = \overline{T} = T^{++} \subseteq T^+$.
- Si T hermítico y cerrado $\Rightarrow (T = T^+ \Leftrightarrow T^+ \text{ es hermítico})$.
- Si T hermítico y cerrado $\Rightarrow T$ es autoadjunto.
- Si T hermítico y $T = T^{++} = T^+$ $\Rightarrow$ T es autoadjunto y cerrado.
- Si T es autoadjunto $\Rightarrow T$ hermítico y cerrado.
- (T hermítico con $D(T) = H$ $\Rightarrow$ T es acotado)$\Rightarrow T$ autoadjunto.
- Si T es hermítico con $D(T) \neq H$ y T es acotado $\Rightarrow$ T es esencialmente autoadjunto.
- Si T cerrado y T^+ hermítico $\Rightarrow$ T autoadjunto.
- Si $\dim H < \infty$ $\Rightarrow$ (T hermítico $\Leftrightarrow$ T autoadjunto).

▶ Lema: Dado $T \in \mathcal{L}(H)$, tal que $\langle x, Tx \rangle = 0$ $\forall x \in H$ $\Rightarrow$

- Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $T = T^+$ $\Rightarrow$ $T = 0$
- Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $T = 0$

▶ Dado $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$, $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

- Si $D(T) = H$ y T es acotado $\Rightarrow$
  (T es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in H$).
- Si T es hermítico ($\Rightarrow \overline{D(T)} = H$)$\Rightarrow$ $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in D(T)$.

■ Nota: Considerados los operadores lineales $T: D(T) < H \to H$, $\overline{D(T)} = H$:

- Existen operadores hermíticos no acotados no autoadjuntos.
- NO existen operadores autoadjuntos no acotados con $D(T) = H$.

▶ Bloque 2 de propiedades (acotados): Sea $A \in \mathcal{A}(D(A) < H, H)$ con $\overline{D(A)} = H$, entonces:

- Si A hermítico $\Rightarrow$ $A^+ = \overline{A}$.
- Si $A \in \mathcal{A}(H)$ (esto es, $D(A) = H$) y A es hermítico $\Rightarrow$ $A^+ = A$, *i.e.*, es autoadjunto.
- Si A hermítico $\Rightarrow$ puede siempre extenderse a $D(A) = D(A^+) = H$, de forma que se obtiene un autoadjunto.
- Dados $A_i \in \mathcal{A}(D(A_i))$, $i = 1, 2$, autoadjuntos $(\overline{D(A_i)} = H)$ $\Rightarrow$ $A_1 + A_2$ y αA_i, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, autoadjuntos.
- Dados $A_i \in \mathcal{A}(D(A_i) < H, H)$, $i = 1, 2$, con $\overline{D(A_i)} = \overline{D(A_1 A_2)} = H$, autoadjuntos $\Rightarrow$ ($A_1 A_2$ autoadjunto $\Leftrightarrow$ $A_1 A_2 = A_2 A_1$).
- Si A autoadjunto con $R(A) \subset D(A)$ $\Rightarrow$ A^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es autoadjunto.

- Dado $A\in \mathcal{A}(D(A)<H,H)$ hermítico $(\Rightarrow \overline{D(A)}=H)$, entonces:
  - Si $D(A)\neq H$, A es esencialmente autoadjunto.
  - Si $D(A)=H$, A es autoadjunto.

- Dado $A\in \mathcal{A}(H)$ con $\mathbb{k}=\mathbb{C}$; entonces:
  - $\exists!$ expresión $A=A_r+iA_i$ con A_r, $A_i\in \mathcal{A}(H)$ y autoadjuntos.
  - $A_r=\dfrac{1}{2}(A+A^+)$; $A_i=\dfrac{1}{2i}(A-A^+)$.

Es posible definir una relación de orden parcial (*i.e.*: no todos los elementos serán ordenables) en el conjunto de los operadores acotados autoadjuntos (tanto para $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ como para $\mathbb{k}=\mathbb{C}$):

- Sea $\mathrm{AA}=\left\{A\in \mathcal{A}(H)\ /\ A^+=A\right\}$, entonces:
  - Dados $A,B\in \mathrm{AA}$: $A\leq B\equiv B\geq A \Leftrightarrow \langle x,Ax\rangle\leq\langle x,Bx\rangle\ \forall x\in H$
    - Si $A\leq B \Rightarrow$ A+C $\leq$ B+C $\forall A,B,C\in \mathrm{AA}$
    - Si $A\leq B \Rightarrow \alpha A\leq\alpha B\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\geq 0\ \ \forall A,B\in \mathrm{AA}$

Operadores positivos

Dado un operador lineal $T:D(T)<H\to H$ hermítico $(\Rightarrow \overline{D(A)}=H)$, se define como *operador positivo* $\Leftrightarrow$ $\langle x,Tx\rangle\geq 0\ \ \forall x\in D(T)$.

- Dados T_1 y T_2 operadores positivos $\Rightarrow$
  - T_1 y T_2 conmutan.
  - Su producto no es, en general, un operador positivo.

- Todo operador $A\in \mathcal{A}(H)$ positivo es $A\geq 0$ y autoadjunto.
- Dado $A\in \mathcal{A}(H)$ $\Rightarrow$ AA^+ y A^+A son acotados, autoadjuntos y positivos.
- Dado $A\in \mathcal{A}(H)$ positivo ($\Rightarrow A$ es autoadjunto) $\Rightarrow$
  - $A+I$ es invertible
  - $\exists! B=A^{\frac{1}{2}}\in \mathcal{A}(H)$, *operador raíz cuadrada* de A, $A^{\frac{1}{2}}$, tal que $B^2=A$.
    - $A^{\frac{1}{2}}\in \mathcal{A}(H)$; $A^{\frac{1}{2}}\geq 0$ y $(A^{\frac{1}{2}})^+=A^{\frac{1}{2}}$.

Dado $A\in \mathcal{A}(H)$ se define el *operador módulo* de A, $|A|$, como $|A|=(A^+A)^{\frac{1}{2}}$.

- $|A|\geq 0$; $\|\,|A|\,\|=\|A\|$; $(|A|=|A^+|\Leftrightarrow\left[A,A^+\right]=0)$.

-Nota: en general, $|A+B|\not\leq|A|+|B|$, $|AB|\neq|A||B|$ y $\|\,|A|-|B|\,\|\not\leq\|A-B\|$.

■ Proyectores ortogonales $(\subset \mathcal{A})$

Proyectores ortogonales

⊕ Definición: Dados un espacio euclídeo L y dos subespacios lineales $M_1 < L$ y $M_2 < L$ tales que $L = M_1 \oplus M_2$, un proyector de L sobre M_1 en la dirección de M_2, $P_{M_1}^{M_2} \equiv P_{M_1} : L \to M_1$, se dice que es un *proyector ortogonal* $\Leftrightarrow M_1 \perp M_2$.

▶ ⊕ Dado $P \in \mathcal{A}(H)$, se define como un *proyector ortogonal sii* $P = P^+ = P^2$.

▶ Dados un proyector ortogonal P y el operador identidad I en L $\Rightarrow$ el operador $I - P$ es proyector ortogonal con recorrido $R(I-P) = \ker P$ y núcleo $\ker\ (I-P) = R(P)$.

▶ Todo proyector ortogonal P_M es continuo, positivo, $P \geq 0$, y, *sii* $M \neq \{\vec{0}\}$ y $P \neq 0$, posee norma unidad.

▶ Dado P proyector ortogonal en L $\Rightarrow$

- $\ker P \lhd L$ y $R(P) \lhd L$
- $\ker P = (R(P))^{\perp}$ y $R(P) = (\ker P)^{\perp}$

▶ Dados dos subespacios lineales $M < L$ y $N < L$ tales que $L = M \oplus N$ y $M \perp N$, entonces $\Rightarrow$ $\exists!$ (existe un único) proyector ortogonal P con $R(P) = M$ y $\ker P = N = M^{\perp}$.

-Nota: Obsérvese que, dado un $M \lhd L$, no está garantizado que exista un proyector ortogonal P_M, o sea, no siempre se tendrá $L = M \oplus M^{\perp}$ (algo que sí ocurre cuando el espacio es completo, esto es, un Hilbert).

▶ Dado un operador lineal $P \in \mathcal{L}(H)$, P es un proyector ortogonal $\Leftrightarrow$ $P^2 = P$ y $\langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle$ $\forall x, y \in H$ (esto es, sii P es idempotente y autoadjunto).

▶ Dados $P_i \in \mathcal{A}(H)$, proyectores ortogonales con recorrido $M_i = R(P_i) \lhd H$, $i = 1, 2$:

- $P_1 P_2$ es proyector ortogonal sobre $M_1 \cap M_2$ $\Leftrightarrow$ $[P_1, P_2] = 0$.
- $P_1 + P_2$ es proyector ortogonal sobre $M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow M_1 \perp M_2$.
- $P_1 P_2 = P_1 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$.
- $P_2 - P_1$ es proyector ortogonal sobre $M_1^{\perp} \cap M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ $(P_1 \leq P_2)$.
- Dada la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $P_m \leq P_n$ si $m < n$ $\Rightarrow$ $P_n \to P$ con P proyector ortogonal sobre $\overline{\bigcup_n M_n}$.

Operadores normales

Dado un operador lineal $N: D(N) = H \to H$ con $\overline{D(N)} = H$, se define como *operador normal* $\Leftrightarrow$ $N^+N = NN^+$ (*i.e.*: $\left[N, N^+\right] = 0$, o sea, conmutan).

- Dado un operador lineal $T: D(T) = H \to H$ con $\overline{D(T)} = H$, es operador normal $\Leftrightarrow$ $\|Tx\| = \|T^+x\|$ $\forall x \in H$ $\Leftrightarrow$ T^+ es operador normal.

- Todo operador autoadjunto acotado es normal.

- Dado un operador lineal acotado $A \in \mathcal{A}(H)$ con $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, es operador normal $\Leftrightarrow$ $[A_r, A_i] = 0$, con $A_r = \frac{1}{2}(A + A^+)$ y $A_i = \frac{1}{2i}(A - A^+)$.

- Propiedades:

  - Dado un operador normal acotado N $\Rightarrow$ $\|N^2\| = \|N\|^2$.
  - Dado un operador lineal $T: D(T) = H \to H$, T *operador autoadjunto* $\Rightarrow T$ es normal.
  - Si $N_i : D(N_i) = H \to H,\ i = 1,2$, normales $\Rightarrow$ $N_1 + N_2$ y $\alpha N_i,\ \forall \alpha \in \mathbb{k}$, normales; $N_1 N_2$ normal $\Leftrightarrow$ $\left[N_1, N_2^+\right] = \left[N_2, N_1^+\right] = 0$.
  - Dada $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, sucesión de operadores $N_i : D(N_i) = H \to H,\ i = 1,2$, normales acotados, $N_i \to T$, T operador acotado $\Rightarrow$ T operador normal.

Operadores isométricos $(\subset \mathcal{A})$

Dado un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to L_2$ con $\overline{D(T)} = L_1$, se define como *operador isométrico* $\Leftrightarrow$ $\|Tx\|_1 = \|x\|_2$ $\forall x \in D(T)$.

- Dado un operador lineal $T: D(T) < L_1 \to L_2$ con $\overline{D(T)} = L_1$, es operador isométrico $\Leftrightarrow$ $\langle Tx, Ty\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1$ $\forall x, y \in D(T)$.

- Dado un operador T lineal e isométrico $\Rightarrow$ T es operador acotado, no-singular y con $\|T\| = 1$.

- Dado un operador lineal $T: D(T) = H \to H$ con $\overline{D(T)} = H$, es operador isométrico $\Leftrightarrow$ $T^+T = I_{D(T)}$ (restricción de la identidad a $D(T)$).

Operadores unitarios $(\subset \mathcal{A})$

⌖ Dado un operador lineal acotado $U \in \mathcal{A}(H)$, se define como *operador unitario* $\Leftrightarrow$ es un isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ es una biyección lineal y $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \ \ \forall x, y \in H$ (se tiene $D(U) = R(U) = H$).

▶ Dado un operador lineal acotado $U \in \mathcal{A}(H)$, es unitario $\Leftrightarrow$ U es invertible y $U^+ = U^{-1}$ $\Leftrightarrow$ U es invertible y $U^+U = UU^+ = I$ $\Leftrightarrow$ U^+ es unitario $\Leftrightarrow$ U transforma una base ortonormal de H en otra base ortonormal de H.

▶ Dados dos operadores unitarios $U_1, U_2 \in \mathcal{A}(H)$ $\Rightarrow$ su producto es también un operador unitario $U_1U_2 \in \mathcal{A}(H)$.

▶ Dado $T \in \mathcal{A}(H)$ con H de dimensión finita, si es operador isométrico, es unitario.

▶ Todo operador unitario es normal.

▶ Dado $T \in \mathcal{L}(D(T) < H, H)$ y definido el operador unitario $U \in \mathcal{A}(H \oplus H)$: $U(x, y) = (-y, x)$ $\forall (x, y) \in H \oplus H$, tal que $U^+ = -U$, se tendría, supuesto que el operador poseyera adjunto, que:

$$\forall\, x \in D(T^+) \ \ \forall\, y \in D(T) \ : \ \langle T^+x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \langle (x, T^+x), U(y, Ty) \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \ \eta(T^+) = (U(\eta(T)))^{\perp},$$

de forma que siempre que el complemento ortogonal de la acción del operador U sobre el gráfico del operador T sea el gráfico de un operador lineal, entonces puede definirse T^+, lo que ocurre para operadores con dominio denso, $\overline{D(T)} = H$.

⌖ Dados dos operadores lineales $T_i : D(T_i) < H \to H$, $i = 1, 2$, se definen como *operadores unitariamente equivalentes* $\Leftrightarrow$ existe un operador unitario $U \in \mathcal{A}(H)$ tal que $U(D(T_1)) = D(T_2)$ y $T_2 = U^{-1}T_1U$.

▶ La equivalencia unitaria es una relación de equivalencia en la clase de todos los operadores lineales $T : D(T) < H \to H$.

▶ Dados operadores lineales, uno $A : D(A) < H \to H$ acotado y otro $T : D(T) < H \to H$, unitariamente equivalentes $\Rightarrow$ T es acotado y $\|T\| = \|A\|$.

▶ Dados operadores lineales, uno $T_1 : D(T_1) < H \to H$ hermítico (o autoadjunto, o unitario) y otro $T_2 : D(T_2) < H \to H$, unitariamente equivalentes $\Rightarrow$ T_2 es hermítico (autoadjunto, unitario).

▶ Dados los operadores unitarios $A_n, A, B_n, B \in \mathcal{A}(H)$ tales que $A_n \longrightarrow A$ y $B_n \longrightarrow B$ $\Rightarrow$ $A_n B_n \longrightarrow AB$.

▶ ***Mecánica Cuántica***: El *operador de evolución temporal* para un vector estado $|\psi(t)\rangle$, *i.e.*: $|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$, es un operador lineal unitario; para un sistema conservativo, $U(t,t_0) = \exp[-i(t-t_0)\mathrm{E}/\hbar]$ es el operador evolución temporal para los *estados estacionarios* o estados propios de H con autovalor E (energía), $\mathrm{H}|\psi(t_0)\rangle = \mathrm{E}|\psi(t_0)\rangle$, donde H es el Hamiltoniano del sistema.

⌖ *Operador de Fourier-Plancherel*:

-Se trata del operador unitario $\mathrm{F} \in \mathcal{A}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ tal que $\forall f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$(\mathrm{F}f)(y) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}-1}{x} f(x)dx \quad \text{c.d.}$$

$$(\mathrm{F}^{-1}g)(x) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+ixy}-1}{y} g(y)dy \quad \text{c.d.} \quad ,$$

extensión a todo $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ del operador que da la transformación de Fourier sobre las funciones de la envolvente lineal de la b.o.n. de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\forall f, g \in \left[\{e_n\}_{n\in N}\right] \quad / \quad (\mathrm{F}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x)dx \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

$$(\mathrm{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ixy} g(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Ampliar: Abellanas y Galindo, pp. 188ss.).

■ Operadores compactos ($\subset \mathcal{A}$; $\mathcal{C}(H) < \mathcal{A}(H)$)

⌖ Dado un operador lineal $T: D(T) = L_1 \to L_2$ con $\overline{D(T)} = L_1$, se define como *operador compacto* o *completamente continuo* ⇔

⇔ dada la bola unidad $B = \{x \in L_1 / \|x\|_1 \le 1\}$, se tiene que $\overline{T(B)}$ es compacto

⇔ $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B \;\Rightarrow\; \{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(B)$ contiene alguna subsucesión convergente (en $\overline{T(B)}$).

⇔ $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1$, sucesión acotada, $\Rightarrow$ $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2$ contiene alguna subsucesión convergente (en L_2).

⇔ $\forall S \subset L_1$, subconjunto acotado, $\Rightarrow$ $\overline{T(S)}$ es compacto.

⇔ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes (nota: ver tema 5 para estos dos conceptos).

▶ Propiedades:

- Todo operador compacto es acotado (nota: existen operadores acotados no compactos; *e.g.*: para L_1 con dimensión no finita, el operador identidad $I: L_1 \to L_1$ no es compacto; en dimensión finita, un operador es lineal ⇔ es acotado ⇔ es compacto).
- Todo operador acotado *degenerado* (*i.e.*: de rango finito, $\dim R(T)$ finita) es compacto.

- C operador compacto $\Rightarrow$ C^+ compacto.
- A operador acotado y A^+ compacto $\Rightarrow$ A compacto.
- Dado $C \in \mathcal{C}(H)$ $\Rightarrow$ $\exists\, x \in D(C)$, con norma $\|x\| = 1$, tal que $\|Cx\| = \|x\|$.
- C operador compacto $\Leftrightarrow$ $|C|$ operador compacto.

⌖ Sea $\mathcal{C}(H)$ el conjunto de los operadores $C : D(C) = H \to H$ compactos.

▶ Propiedades:

- $\mathcal{C}(H) < \mathcal{A}(H)$
- $\forall C \in \mathcal{C}(H),\ \forall A \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow CA \in \mathcal{C}(H),\ AC \in \mathcal{C}(H)$
- $\{C_n\} \subset \mathcal{C}(H),\ C_n \xrightarrow{u} C \Rightarrow C \in \mathcal{C}(H)$
- $\{A_n\} \subset \mathcal{A}(H),\ \mathrm{A}_n$ degenerado $\forall n,\ \mathrm{A}_n \xrightarrow{u} \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A} \in \mathcal{C}(H)$

▶ Sea $T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n,\ N < \infty$, con P_n proyector ortogonal $\forall n$, $\lambda_n P_n \neq 0\ \forall n$ y $P_n \perp P_m$ si $n \neq m$; entonces T es compacto $\Leftrightarrow$ P_n es degenerado $\forall n$.

▶ Sea $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$, con P_n proyector ortogonal $\forall n$, $\lambda_n P_n \neq 0\ \forall n$ y $P_n \perp P_m$ si $n \neq m$; entonces T es compacto $\Leftrightarrow$ P_n es degenerado $\forall n$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

▶ Sea $C \in \mathcal{C}(H)$, C operador normal $\Rightarrow$ $C = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n,\ N < \infty$, con P_n proyector ortogonal degenerado $\forall n$, $\lambda_n P_n \neq 0\ \forall n$ y $P_n \perp P_m$ si $n \neq m$, o bien $C = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ con P_n proyector ortogonal degenerado $\forall n$, $\lambda_n P_n \neq 0\ \forall n$, $P_n \perp P_m$ si $n \neq m$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

◈ Sean $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos bases ortonormales numerables del espacio H.

▶ Lema: Dado $A \in \mathcal{A}(H)$ tal que $\sum_n \|Ae_n\|^2 < \infty$, $\forall \{e'_n\}$, b.o.n. de H $\Rightarrow$

$$\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_{n,m} |\langle e'_m, Ae_n \rangle|^2 = \sum_n \|Ae'_n\|^2 = \sum_n \|A^+ e_n\|^2 = \sum_n \|A^+ e'_n\|^2 .$$

Operadores de la clase Hilbert-Schmidt ($\mathcal{C}_2 < \mathcal{C}$)

⌖ Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, se define $|||A|||^2 \equiv \|A\|_2^2 = \sum_n \|Ae_n\|^2$.

⌖ Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, se define A como *operador perteneciente a la clase Hilbert-Schmidt*, o *de Hilbert-Schmidt*, sii $|||A||| \equiv \|A\|_2 < +\infty$.

▶ Propiedades:

- $\forall A \in \mathcal{A}(H) \;\Rightarrow\; \|A\| \le \|A\|_2$
- $\forall A \in \mathcal{A}(H)$, $\|A\|_2 = 0 \;\Leftrightarrow\;$ A=0

⌖ Sea $\mathcal{C}_2(H)$ el conjunto de los operadores $C_2 : D(C_2) = H \to H$ de la clase Hilbert-Schmidt.

▶ Propiedades:

- $|||\bullet|||$ define una norma en $\mathcal{C}_2(H)$ (*norma Hilbert-Schmidt*).
- $(\mathcal{C}_2(H), |||\bullet|||)$ es Hilbert; $\langle C_2, B_2 \rangle = \sum_{e_n \in b.o.n.} \langle Be_n, Ce_n \rangle$, $C_2, B_2 \in \mathcal{C}_2(H)$.
- $\mathcal{C}_2(H) < \mathcal{C}(H) < \mathcal{A}(H)$.
- $\forall C \in \mathcal{C}_2(H) \;\Rightarrow\; C^+ \in \mathcal{C}_2(H)$ y $\|C\|_2 = \|C^+\|_2$.
- $C \in \mathcal{C}_2(H) \;\Leftrightarrow\; |C| \in \mathcal{C}_2(H)$.
- $\forall C \in \mathcal{C}_2(H),\ \forall A \in \mathcal{A}(H) \;\Rightarrow\; CA \in \mathcal{C}_2(H),\ AC \in \mathcal{C}_2(H)$.
- $\forall C \in \mathcal{C}_2(H),\ \forall A \in \mathcal{A}(H) \;\Rightarrow\; \|CA\|_2 \le \|C\|_2 \|A\|$, $\|AC\|_2 \le \|C\|_2 \|A\|$.

⌖ *Operadores integrales de Hilbert-Schmidt*:

- Operador lineal continuo $\mathcal{K} \in \mathcal{A}\left(L^2([a,b])\right)$, con dominio todo el espacio y regla de actuación

$$(\mathcal{K} f)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy \text{, con } K(x,y) \in L^2([a,b]\times[a,b]).$$

- Operador lineal continuo $\mathcal{K} \in \mathcal{A}\left(L^2(\mathbb{R})\right)$, con dominio todo el espacio y regla de actuación

$$(\mathcal{K} f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y) f(y) dy \text{, con } K(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

- Propiedad: $\|\mathcal{K} f\| \le \|K\| \cdot \|f\|$, por lo que $\|\mathcal{K}\| \le \|K\|$.

-Nota: estos operadores aparecen en la teoría de ecuaciones integrales.

Operadores de la clase traza $(\mathcal{C}_1 < \mathcal{C}_2)$

⌖ Dado $A \in \mathcal{A}(H)$ se define como *operador de la clase traza* $\mathcal{C}_1(H)$ o *trazable sii* $|A|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_2(H)$.

⌖ Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, se define $\|A\|_1 \equiv \text{tr } |A| = \sum_{e_n \in b.o.n.} \left\| |A|^{\frac{1}{2}} e_n \right\| = \sum_n \langle e_n |A| e_n \rangle = \left\| |A|^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2$.

- Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, $A \in \mathcal{C}_1(H) \Leftrightarrow \|A\|_1 < +\infty$.

- Propiedades:
  - $\forall A \in \mathcal{A}(H)$, $A \in \mathcal{C}_1(H) \Leftrightarrow |A| \in \mathcal{C}_1(H) \Leftrightarrow$ A=BC con B,C$\in \mathcal{C}_2(H)$.
  - $\|\cdot\|_1 \equiv \text{tr } |A|$ define una norma en $\mathcal{C}_1(H)$ (*norma traza*).
  - $(\mathcal{C}_1(H), \|\cdot\|_1)$ es Banach.
  - $\forall C \in \mathcal{C}_1(H) \Rightarrow C^+ \in \mathcal{C}_1(H)$ y $\|C\|_1 = \|C^+\|_1$.
  - $\mathcal{C}_1(H) < \mathcal{C}_2(H) < \mathcal{C}(H) < \mathcal{A}(H)$.
  - $\forall C \in \mathcal{C}_1(H) \Rightarrow \|C\| \le \|C\|_2 \le \|C\|_1$.
  - $\forall C \in \mathcal{C}_1(H),\ \forall A \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow CA \in \mathcal{C}_1(H),\ AC \in \mathcal{C}_1(H)$.
  - $\forall C \in \mathcal{C}_1(H),\ \forall A \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow \|CA\|_1 \le \|C\|_1 \|A\|$, $\|AC\|_1 \le \|C\|_1 \|A\|$.

⌖ Dado $C \in \mathcal{C}_1(H)$, se define su *traza*, $\text{tr } C$, como el escalar

$$\text{tr } C = \sum_{b.o.n.} \langle e_n, Ce_n \rangle .$$

- La aplicación $\text{tr } : \mathcal{C}_1(H) \to \mathbb{C}$ satisface:
  - $\text{tr } C^+ = (\text{tr } C)^*$.
  - $\forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{tr } (\lambda C) = \lambda \text{ tr } C$.
  - $\text{tr (C+B)} = \text{tr } C + \text{tr } B$.
  - $C \in \mathcal{C}_1(H),\ A \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow \text{tr } CA = \text{tr } AC$.
  - $|\text{tr } C| \le \text{tr } |C|$.

Operadores densidad $(\in \mathcal{C}_1)$ y estados en Mecánica Cuántica (*cf*. Abellanas y Galindo, pp. 211-212)

⌖ **Mecánica Cuántica:** Los *estados físicos de un sistema cuántico* se definen como aplicaciones del conjunto $P(H)$ de los proyectores ortogonales en H (recuérdese: separable y complejo) sobre el intervalo $[0,1]$, $p : P(H) \to [0,1]$, de forma que $p(P)$ representa la probabilidad de que al medir el observable P en el estado p resulte el valor 1.

- Estas aplicaciones deben cumplir:

a) $p(0)=0,\ p(1)=1$

b) $\forall i \neq j\ :\ p(\sum_{i=1}^{\infty} P_i)=\sum_{i=1}^{\infty} p(P_i)$ siempre que $P_i \perp P_j$.

▶ El *teorema de Gleason* asegura que, si $\dim H \geq 3 \ \Rightarrow\ \forall p\ \exists \rho \in \mathcal{C}_1(H)$, autoadjunto $(\rho^+ = \rho)$ y positivo $(\rho \geq 0)$, tal que $\mathrm{tr}\,\rho = 1$ y $p(P)=\mathrm{tr}\,(\rho P)\ \ \forall P$.

⌖ Estos operadores ρ, que representan los estados del sistema físico, se denominan *operadores densidad*.

▶ Dados dos operadores densidad, ρ_1 y ρ_2 $\Rightarrow$ toda *combinación lineal convexa*, esto es, de la forma $\rho = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2,\ \lambda_1,\lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1$, representa otro operador densidad.

⌖ ***Mecánica Cuántica*:** Un operador densidad expresable como combinación lineal convexa de otros dos, con $\rho = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2,\ \lambda_1,\lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1$, con $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, define un *estado impuro* o *estado mezcla* del sistema; si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ el estado se define como *estado puro*.

▶ Todo operador compacto normal C (en particular, todo operador autoadjunto de clase traza) admite expresión $C=\sum_1^{\infty}\lambda_n P_n,\ \ P_n \perp P_m$ si $n \neq m$.

▶ Todo operador densidad (que, por serlo, es positivo) admite expresión

$$\rho = \sum_1^{\infty}\lambda_n P_n,\ \ \lambda_n \geq 0,\ P_n \neq 0\ \ \forall n\ \ y\ \ P_n \perp P_m\ \ \text{si}\ \ n \neq m.$$

- Como $\mathrm{tr}\,\rho = 1$, se tiene $\sum_1^{\infty}\lambda_n \mathrm{tr}\,P_n = 1 \ \Rightarrow\ (P_n,\ \lambda_n \neq 0\ \Rightarrow P_n$ de rango finito$)$.
- Y, supuestos dos λ_1 y λ_2 no nulos, entonces:

$$\rho = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots = \lambda_1 \mathrm{tr}P_1\left[\frac{P_1}{\mathrm{tr}P_1}\right] + (1-\lambda_1\mathrm{tr}P_1)\left[\frac{\lambda_2 P_2+\cdots}{1-\lambda_1\mathrm{tr}P_1}\right]$$, siendo $1-\lambda_1\mathrm{tr}P_1 \neq 0$,

ya que $\lambda_2 \neq 0$. Luego el operador ρ es combinación lineal convexa de los dos operadores $\frac{P_1}{\mathrm{tr}P_1}$ y $\frac{\rho-\lambda_1 P_1}{1-\lambda_1\mathrm{tr}P_1}$.

- Consecuentemente, ρ es puro $\Leftrightarrow$ ρ es un proyector unidimensional $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}\rho^2 = 1$. En este caso es frecuente identificar el estado ρ con uno cualquiera de los vectores de norma 1 que engendran el subespacio de proyección de ρ.