MÉTODOS MATEMÁTICOS III
ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Profesora: Mª Cruz Boscá

TEMA 5: FUNCIONALES Y DISTRIBUCIONES

◈ Sea un espacio de Hilbert $H \equiv$ (**L**, +, **·**) sobre el cuerpo $\mathbb{k}$.

■ Funcionales lineales y espacio dual

⊕ Se define como *funcional lineal* o *forma lineal* en un espacio normado L a todo operador lineal $F: D(F) < L \to \mathbb{k}$.

▶ Todo funcional lineal no nulo, $F \neq 0$, con $D(F) = L$, es suprayectivo, *i.e.*, $R(F) = \mathbb{k}$.

▶ ***Teorema de Hahn-Banach:***
Dados un espacio normado L y un subespacio lineal $M < L$ del mismo, entonces todo $F: M \to \mathbb{k}$, funcional lineal continuo sobre M, puede extenderse a todo L, $F_{ext}: L \to \mathbb{k}$, teniéndose $\|F_{ext}\| = \|F\|$.

⊕ Dado un espacio normado L, se define su *espacio dual* L^* como el espacio lineal normado $L^* \equiv (\mathcal{A}(L,\mathbb{k}), \|\cdot\|)$ de todos los funcionales lineales $F: L \to \mathbb{k}$ continuos.

▶ $F \in L^* \;\Rightarrow\; \ker F \lhd L$.

▶ Dados un espacio normado L y un vector no nulo $x_0 \in L$ del mismo, entonces existe un funcional lineal acotado $F \in L^*$ tal que $F(x_0) = \|x_0\|$ con $\|F\| = 1$.

▶ Dados un espacio euclídeo $(L, <\cdot>)$ y un vector $g \in L$, g genera un funcional lineal continuo $F \in L^*$ para el que $\|F\|_* = \|g\|_L$, definido por la regla de actuación $F(x) = \langle g, x\rangle \;\; \forall x \in L$.

-Nota: g se denomina como el vector “generador” del funcional F.

▶ ***Teorema de representación de Riesz o de Riesz-Fréchet:***
Dado un H, entonces $F \in H^* \;\Leftrightarrow\; \exists!\, g \in H \;\; / \;\; F(x) = \langle g, x\rangle \;\; \forall x \in H$, teniéndose $\|F\| = \|g\|$.

▶ Dado $F \in H^*$, entonces se tiene:

- $\ker F \subsetneq H \;\Rightarrow\; \dim(\ker F)^{\perp} = 1$.
- $\ker F = H \;\Rightarrow\; \dim(\ker F)^{\perp} = 0$.

▶ Dado $F \in \mathcal{L}(H,\Bbbk)$, entonces $F \in H^*$ $\Leftrightarrow$ $\ker F \lhd H$.

▶ $\forall\ F_1, F_2 \in H^*$ la aplicación $\langle F_1, F_2 \rangle = \langle g_2, g_1 \rangle$, siendo g_i, $i = 1, 2$, el vector de H (único) que genera F_i, define un producto escalar en H^*.

▶ H y H^* son isomorfos antilineal e isométricamente; esto es, $\exists \tau : H^* \to H$ / τ es un operador antilineal y biyectivo que conserva la norma (y distancia):

- $\forall\ \alpha, \beta \in \Bbbk,\ \ \forall\ F_1, F_2 \in H^*$: $\tau(\alpha F_1 + \beta F_2) = \alpha^* \tau(F_1) + \beta^* \tau(F_2)$.
- $\|\tau(F)\| = \|g\| = \|F\|$ $\forall F \in H^*$, siendo g el vector de H (único) que genera F.

▶ Dado un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$, su *espacio dual*, $L^* \equiv (\mathcal{A}(L,\Bbbk), \|\cdot\|)$ y el dual de su dual, L^{**}, son espacios de Banach; dado un pre-Hilbert H, su dual H^* y el dual de su dual H^{**} son de Hilbert.

⌖ Dado un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$, se define como *reflexivo* $\Leftrightarrow$ L y L^{**} son isomorfos isométricamente.

▶ Dado L reflexivo $\Rightarrow$ L es Banach.

▶ Todo H es reflexivo.

▶ Si H es separable, entonces, dada una base ortonormal numerable de H, $\{e_i\}_{i\in I}$, $card\ I \le \aleph_0$, se tiene:

$g = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i = \sum_{i\in I} \langle e_i, g \rangle e_i = \sum_{i\in I} \langle g, e_i \rangle^* e_i = \sum_{i\in I} F(e_i)^* e_i$, siendo $F \in H^*$ el funcional lineal continuo generado por el vector g de H *cf.* el teorema de Riesz.

■ Formas sesquilineales

⌖ Se define como *forma sesquilineal* en un espacio normado L a todo operador lineal $F : L \times L \to \Bbbk$ que verifique los siguientes axiomas:

Ax. 1: $F(x, y+z) = F(x,y) + F(x,z)$ $\forall x,y,z \in L$ (*distributividad* a la derecha)

Ax. 2: $F(x+y, z) = F(x,z) + F(y,z)$ $\forall x,y,z \in L$ (*distributividad* a la izquierda)

Ax.3: $F(\alpha x, \beta y) = \alpha^* \beta\, F(x,y)$ $\forall \alpha, \beta \in \Bbbk$ $\forall x, y \in L$ (*homogeneidad*)

- Si $\Bbbk = \mathbb{R}$, la forma se denomina como bilineal.

⌖ Si una forma sesquilineal F cumple también el axioma
Ax. 4: $F(x,y) = F(y,x)^*$ $\forall x, y \in L$ (*hermiticidad*),
entonces se define como forma sesquilineal hermítica.
-un ejemplo de forma sesquilineal hermítica lo proporciona el producto escalar en un espacio euclídeo.

⌖ Una forma sesquilineal F se define como acotada
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ *finito*, $k > 0$ / $|F(x,y)| \le k\ \|x\|\ \|y\|$ $\forall x, y \in L$.

⌖ Dada una forma sesquilineal acotada, se define su norma, $\|F\|$, según

$\|F\| = \sup\limits_{\substack{x\neq 0 \neq y \\ x,y\in L}} \dfrac{|F(x,y)|}{\|x\|\ \|y\|}$ (expresión que efectivamente define una norma).

▶ Teorema: Dada una forma sesquilineal acotada F en un Hilbert H, entonces $\exists!\ \mathrm{A} \in \mathcal{A}(H)$ / $F(x,y) = \langle x, Ay \rangle$ $\forall x, y \in H$, teniéndose $\|F\| = \|A\|$.

Notación de Dirac

Notación de Dirac: $\forall x \in H,\ F_g \in H^*\ :\ F_g(x) = \langle g, x\rangle \equiv \langle g \mid x\rangle \in \mathbb{k}$, escalar resultado del producto escalar de los vectores g y x de H, o valor del funcional continuo generado por g, $F_g \in H^*$, en $x \in H$. La notación de Dirac, o *notación bra-ket*, introduce unos *vectores ket* $|\bullet\rangle$ *y bra* $\langle \bullet|$; el bra $\langle g| \equiv F_g \in H^*$ representa el funcional lineal continuo $F_g \in H^*$ generado por el vector $g \in H$ (g es único en un Hilbert); $\langle g \mid x\rangle$ representa el valor del funcional en el punto $x \in H$, punto o vector de H que se representa por el ket $|x\rangle$.

- El producto escalar de dos vectores del espacio, $\langle x, y\rangle = F_x(y) \in \mathbb{k}$, o valor del funcional lineal continuo F_x que genera x en el punto y, se representa como el bra-ket $\langle x \mid y\rangle \equiv \langle x, y\rangle \equiv \langle y \mid x\rangle^*$, denominándose *producto interior de Dirac* o *producto bra-ket*.
- Dados un ket $|x\rangle$ y un bra $\langle y|$, el *producto exterior de Dirac* o *producto ket-bra* $|x\rangle\langle y|$ representa:

 -bien el operador lineal $|x\rangle\langle y| : H \to H$ que hace corresponder a cada ket $|z\rangle \in H$ el ket $|x\rangle\langle y \mid z\rangle \in H$,

-bien el operador lineal $|x\rangle\langle y| : H^* \to H^*$ que hace corresponder a cada bra $\langle z| \in H^*$ el bra $\langle z \mid x\rangle\langle y| \in H^*$.

Dado un ket $|x\rangle$ de norma unidad ($\langle x \mid x\rangle = 1$), el operador $|x\rangle\langle x| : H \to H$ es el proyector ortogonal sobre el subespacio lineal cerrado generado por $|x\rangle$; $P_M = \sum_{\text{b.o.n. de} M} |e_k\rangle\langle e_k|$ para el proyector ortogonal P_M sobre $M \triangleleft H$.

En un espacio de Hilbert separable, el uso de esta notación y la disponibilidad de bases ortonormales numerables, $\{|e_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$, permite reescribir algunas de las ecuaciones introducidas anteriormente:

- Operador identidad:

$$\to \quad I = \sum_{\text{b.o.n. de} H} |e_n\rangle\langle e_n| \ .$$

- Identidad de Parseval:

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = \sum_{\text{b.o.n. de} H} |\langle e_n, x\rangle|^2$$

$$\to \ \langle x \mid x\rangle = \|x\|^2 = \langle x \mid I \mid x\rangle = \left\langle x \,\middle|\, \sum_n |e_n\rangle\langle e_n| \,\middle|\, x \right\rangle = \sum_n \langle x | e_n\rangle\langle e_n | x\rangle \,.$$

- Desarrollo de un vector en la base:
$x = \sum_{b.o.n.\, de H} \langle e_n, x \rangle e_n$

$$\rightarrow \quad |x\rangle = I\,|x\rangle = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n\,|\,x\rangle \,.$$

- Producto escalar de dos vectores:
$\langle x, y \rangle = \sum_{b.o.n.\, de H} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$

$$\rightarrow \quad \langle x\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,I\,|\,y\rangle = \sum_n \langle x|e_n\rangle\langle e_n|y\rangle \,.$$

- Expresión del proyector sobre un subespacio $M \lhd H$:
$P_M x = \sum_{b.o.n.\, de\, M} \langle x_k, x \rangle x_k$

$$\rightarrow \; P_M = \sum_{b.o.n.\, de M} |x_k\rangle\langle x_k| \;,$$

$$\rightarrow |x_M\rangle = P_M\,|x\rangle = \sum_{b.o.n.\, de\, M} |x_k\rangle\langle x_k\,|\,x\rangle \;.$$

► En notación matricial: las representaciones matriciales correspondientes, dada una base ortonormal numerable $\{|e_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ del espacio separable H, en la que $|x\rangle = \sum_n \alpha_n |e_n\rangle$, $|y\rangle = \sum_n \beta_n |e_n\rangle$, son:

- $|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \end{pmatrix} \quad , \quad \langle x| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots) \quad .$

- $|y\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \end{pmatrix} \quad , \quad \langle y| = (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots) \quad .$

- Producto interno bra-ket:

$$\langle x\,|\,y\rangle = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \end{pmatrix} = \sum_n \alpha_n^* \beta_n \quad .$$

- Producto externo ket-bra:

$$|x\rangle\langle y| = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \end{pmatrix} (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots) = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1^* & \alpha_1\beta_2^* & \cdots \\ \alpha_2\beta_1^* & \alpha_2\beta_2^* & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad .$$

Topologías

El estudio a fondo de los espacios normados $(L, \|\cdot\|)$ de dimensión infinita requiere la introducción de topologías adicionales a la topología usual, es decir, a la topología inducida por la norma.

Convergencias fuerte y débil de vectores

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores de un espacio normado L *converge en sentido fuerte o en norma a un* $x \in L$, denominado su *límite,*

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \ \|x_n - x\| < \varepsilon \ \ \forall n > n_0$

$\Leftrightarrow \forall r > 0 \ \exists n_0(r) \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in B(x, r) \ \ \forall n \geq n_0$.

- Esta es la convergencia usual que notamos $x_n \to x$ o $x_n \xrightarrow{f} x$.

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores de un espacio normado L es *débilmente convergente* o *converge en sentido débil a un* $x \in L$, denominado su *límite débil,*

$\Leftrightarrow \forall F \in L^* : F(x_n) \xrightarrow{(\Bbbk) f} F(x) \ \left(\Leftrightarrow \forall F \in L^* : F(x_n) \xrightarrow{(\Bbbk) f} F(x) \equiv \lim_{n\to\infty} |F(x_n) - F(x)| = 0\right)$.

- Esta es la convergencia débil que notamos $x_n \rightharpoonup x$ o $x_n \xrightarrow{d} x$.

- En un Hilbert H, $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow \forall y \in H : \langle y, x_n \rangle \xrightarrow{(\Bbbk) f} \langle y, x \rangle$.

- Sea $x_n \xrightarrow{d} x$. Entonces $\Rightarrow$
  - El límite débil es único.
  - Toda subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge también débilmente a x.
  - La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada: $\exists k \geq 0 : \|x_n\| \leq k \ \forall n \in N$.
- $x_n \xrightarrow{f} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$.
- Si $\dim L = n$, finita, entonces $x_n \xrightarrow{f} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$.

- Un operador continuo transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones débilmente convergentes: Dados $A \in \mathcal{A}(L_1, L_2)$ y $x_n \xrightarrow{d} x$ en L_1, entonces $Ax_n \xrightarrow{d} Ax$ en L_2.

- En H, ($x_n \xrightarrow{d} x$ y $\|x_n\| \xrightarrow{(\mathbb{R}) f} \|x\|$) $\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{f} x$.

- Dada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ tal que $x_n \xrightarrow{d} x$, entonces $\exists \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Bbbk : \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n = x$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ es *sucesión débilmente de Cauchy* (*i.e.*: en τ_d) $\Leftrightarrow \{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy (*i.e.*: en $\Bbbk$, esto es, $\lim_{n>m\to\infty} |F(x_n) - F(x_m)| = 0$) $\forall F \in L^*$.

- Toda sucesión débilmente convergente es débilmente de Cauchy.

⊕ L es *débilmente completo* o *débilmente Banach (débilmente Hilbert)* ⇔ toda sucesión débilmente de Cauchy es sucesión débilmente convergente.

► Todo Banach (Hilbert) es *débilmente Banach (débilmente Hilbert).*

Topología fuerte sobre L

⊕ La *topología fuerte o usual* τ es la que induce la norma vía la métrica: $\forall\, x, y \in L \;:\; d(x,y) = \|x-y\|$; viene caracterizada por el concepto de bola abierta B, de forma que $\tau = \{A : A = \cup B\}$, conjunto de todos los abiertos A o conjuntos expresables como unión de abiertos (*cf.* tema 1).

Topología débil sobre L

⊕ La *topología débil* τ_d es una topología menor, $\tau_d \subset \tau$, ligada al concepto de espacio dual L^*; se caracteriza porque todo funcional continuo (en τ) $F \in L^*$ es continuo en ella (no es metrizable en dimensión infinita).

► Es decir:

1) ⊕ $F \in L^*$ es continuo (en τ) $\Leftrightarrow$ $\left(x_n \xrightarrow{f} x \;\Rightarrow\; F(x_n) \xrightarrow{(\Bbbk)\, f} F(x) \right)$.

2) ⊕ $F \in L^*$ es continuo (en τ_d) $\Leftrightarrow$ $\left(x_n \xrightarrow{d} x \;\Rightarrow\; F(x_n) \xrightarrow{(\Bbbk)\, f} F(x) \right)$.

3) ► $F \in L^*$ continuo en τ $\Rightarrow$ $F \in L^*$ continuo en τ_d.

Topología uniforme sobre $\mathcal{A}(L_1, L_2)$

⊕ La *topología uniforme o usual* τ es la que induce la norma anteriormente definida para un operador acotado/continuo.

⊕ Una sucesión $\{A_n\}_{n\in N} \subset \mathcal{A}(L_1, L_2)$ de operadores del espacio normado $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ *converge en sentido uniforme o en norma a un* $A \in \mathcal{A}(L_1, L_2)$, denominado su *límite* $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ $\Leftrightarrow$ $\sup_{\substack{\|x\|_1 = 1 \\ x \in L_1}} \|A_n x - Ax\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

● Esta es la convergencia usual que notamos $A_n \to A$ o $A_n \xrightarrow{u} A$.

Topología fuerte sobre $\mathcal{A}(L_1, L_2)$

⊕ La *topología fuerte* τ_f es la que está asociada con la convergencia fuerte.

⊕ Una sucesión $\{A_n\}_{n\in N} \subset \mathcal{A}(L_1, L_2)$ de operadores del espacio normado $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ *converge en sentido fuerte a un* $A \in \mathcal{A}(L_1, L_2)$, denominado su *límite fuerte* $\Leftrightarrow$ $\forall x \in L_1 : A_n x \xrightarrow{f} Ax$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in L_1 :\; \|A_n x - Ax\|_2 \to 0$.

● Esta es la convergencia que notamos $A_n \xrightarrow{f} A$.

Topología débil sobre $\mathcal{A}(L_1, L_2)$

La *topología débil* τ_d es la que está asociada con la convergencia débil.

Una sucesión $\{A_n\}_{n\in N} \subset \mathcal{A}(L_1, L_2)$ de operadores del espacio normado $(\mathcal{A}(L_1, L_2), \|\cdot\|)$ *converge en sentido débil a un* $A \in \mathcal{A}(L_1, L_2)$, denominado su *límite débil* $\Leftrightarrow$
$\forall x \in L_1 : A_n x \xrightarrow{d} Ax \Leftrightarrow \forall F \in L_2^*, \forall x \in L_1 : F(A_n x) \to F(Ax) \Leftrightarrow |F(A_n x) - F(Ax)| \to 0$

- Esta es la convergencia que notamos $A_n \xrightarrow{d} A$.
- En $\mathcal{A}(H)$, $A_n \xrightarrow{d} A \Leftrightarrow \forall y, x \in H : \langle y, A_n x\rangle \to \langle y, Ax\rangle$.

- $A_n \xrightarrow{u} A \Rightarrow A_n \xrightarrow{f} A \Rightarrow A_n \xrightarrow{d} A$.

- Las topologías τ_f y τ_d no son, en general, metrizables.

- En dimensión finita, las tres topologías sobre $\mathcal{A}(L_1, L_2)$ coinciden.

- En dimensión infinita, $\tau \supsetneq \tau_f \supsetneq \tau_d$.

Propiedades

- Propiedades: $\forall A, A_n \in \mathcal{A}(H)$ se tiene:
  - $(A_n \to A \Rightarrow A_n^+ \to A^+)$ y $(A_n \xrightarrow{d} A \Rightarrow A_n^+ \xrightarrow{d} A^+)$.
  - Si $\dim_H H < \infty \Rightarrow (A_n \xrightarrow{f} A \Rightarrow A_n^+ \xrightarrow{f} A^+)$.

- Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(H)$, A_n autoadjunto $\forall n$, $A_n \xrightarrow{d} B \Rightarrow B$ autoadjunto.

- Dados los operadores unitarios $U_n, U \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow \left(U_n \xrightarrow{d} U \Rightarrow U_n \xrightarrow{f} U\right)$.

- Dados los operadores unitarios $U_n, U \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow \left(U_n \xrightarrow{d} U \Rightarrow U_n^{-1} \xrightarrow{d} U^{-1}\right)$.

- Dado un operador lineal $T : D(T) = L_1 \to L_2$ con $\overline{D(T)} = L_1$, se define como *operador compacto* o *completamente continuo* $\Leftrightarrow$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes.

SEMINARIO

■ Funciones generalizadas y prueba

En su libro *Principles of quantum mechanics* (1930), Dirac introdujo una generalización del concepto de función, la denominada *delta de Dirac* o *función impulso*, $\delta(x)$, con la que se pueden manejar eficazmente abstracciones en Física como las de masa o carga puntual, o impulsos de duración instantánea ("infinitamente corta").

1. Funciones generalizadas y funciones prueba en $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

▶ La expresión general de un vector F del espacio $H^* \equiv (\mathcal{A}(H,\Bbbk),\|\cdot\|)$, dual de un espacio de Hilbert H dado, puede escribirse de la forma

$$F(\varphi) \equiv F_f(\varphi) = \langle f,\varphi\rangle \;\; ; \;\; f,\varphi \in H \,,$$

donde $f \in H$ representa el vector generador del funcional F, de existencia y unicidad garantizadas por el teorema de Riesz.

● Por ejemplo, la expresión general de un vector F del espacio $H^* \equiv (\mathcal{A}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}),\Bbbk),\|\cdot\|)$, dual del espacio de Hilbert $H \equiv (\mathrm{L}^2(\mathbb{R}),<\cdot>)$ de las funciones de cuadrado integrable Lebesgue sobre la recta real, puede escribirse de la forma

$$F(\varphi) \equiv F_f(\varphi) = \langle f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\varphi(x)dx \;\; ; \;\; f,\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \,,$$

donde $f \in H$ representa el vector generador del funcional, de existencia y unicidad garantizadas por el teorema de Riesz.

▶ Y como H y H^* son isomorfos isométricamente, podemos decir que son, esencialmente, el mismo espacio, llegando incluso a *identificar* en la práctica cada par de elementos correspondientes $f \in H$ *y* $F_f \in H^*$.

▶ **Teorema**: una función continua $f:\mathbb{R}\to\Bbbk$ queda completamente determinada por el conjunto de valores de la integral (en sentido Lebesgue-Stieltjes) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx \equiv \langle f\,|\,\varphi\rangle_{bilineal}$, para todas las funciones continuas $\varphi:\mathbb{R}\to\Bbbk$ tales que son idénticamente nulas fuera de un intervalo finito (**distinto** en general para cada φ) de la recta real.

▶ Los funcionales lineales acotados $F \in H^* \equiv (\mathcal{A}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}),\Bbbk),\|\cdot\|)$,

$$F(\varphi) \equiv F_f(\varphi) = \langle f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(x)\varphi(x)\,dx \quad ,$$

en virtud del anterior teorema, pueden también considerarse como definiendo ellos su función generadora (continua) f, una vez especificada la clase $\mathcal{D} \subseteq H$ de vectores *convenientes* φ, denominándose en este sentido a unos y otros como *funciones generalizadas (los funcionales continuos* $F\in H^*$*)* y *funciones prueba* o *test (las funciones* $\varphi\in\mathcal{D}$*)*, respectivamente.

▶ Es decir, como consecuencia del anterior teorema, *algunas*[(*)] funciones $f(x)$ del correspondiente Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ pueden obtenerse tanto dando valores a su variable x como, alternativamente, a partir del funcional lineal o función generalizada que generan,

$$F_f\in H^* \quad / \quad F_f(\varphi)=\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}} f^*(x)\,\varphi(x)\,dx \ , \ \varphi\in H \ ,$$

cuyo cálculo, para obtener $f(x)$, sólo se requiere en general sobre una **clase específica de funciones prueba**[(*)] $\varphi\in\mathcal{D}\subseteq H$.

(*)Recuérdese que los vectores del Hilbert $H=\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quedaron establecidos anteriormente como clases de equivalencia de funciones, esto es, elementos $C_f\equiv\{f\}\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ constituidos por una función dada f boreliana, de cuadrado integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$, y todas las funciones g que son iguales casi por doquier a ella, $f\triangleq g$, o funciones g que sólo difieren de f sobre un conjunto de medida nula (por lo que $\int_{\mathbb{R}}|f-g|^2\,dx=0$); de estas g puede haberlas también no borelianas, definiéndose en cualquier caso $\|g\|^2=\|f\|^2=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx$. Generalmente, las clases de funciones prueba $\mathcal{D}\subseteq H$ estarán integradas por los representantes continuos de cada clase de equivalencia (de hecho, la teoría de funciones generalizadas ignorará en general las funciones definidas sobre conjuntos de medida nula), y las funciones *normales* (por ejemplo, las continuas) f del espacio $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ serán identificables con el funcional de H^* que generan.

⌖ En el ejemplo de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, las funciones que son, vía el teorema de Riesz, calculables por los dos procedimientos indicados anteriormente, constituyen ejemplos de las denominadas funciones *normales* (o *propias*).

● Esto es: operacionalmente, para determinar una función normal, son posibles dos procedimientos alternativos:

1) se fija el punto x_0 y se calcula el escalar $f(x_0)$, variando x_0 en el dominio de definición de f;

2) se fija la función prueba φ_0 y se obtiene el correspondiente escalar $F(\varphi_0)=\langle f,\varphi_0\rangle$, variando φ_0 en la clase de funciones de prueba $\mathcal{D}$ determinada.

● Obsérvese que los dos procedimientos anteriores son *similares*: basta imaginar que cada función prueba φ_0 presentara un pico muy acusado en el valor x_0, y valiese cero fuera de un pequeño intervalo alrededor de x_0.

▶ Para espacios L no completos, en los que no actúe el teorema de Riesz, su dual L^* contendrá en general vectores que pueden ser:

1) funcionales (lineales continuos) generados por los vectores de L.

2) funcionales (lineales continuos) **no** generados por ningún vector de L.

2. Funciones *generalizadas*: teoría general.

Sea $L=(\mathcal{D},\tau)$ un espacio lineal topológico (*ver tema 1*) cuyos vectores sean funciones $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{k}$, denominado como *espacio de las funciones prueba o funciones test* φ.

- Obsérvese que se introduce una topología τ general, a la que no se le exige, en general, ni siquiera el carácter de ser metrizable(*).

(*) τ es metrizable cuando procede de una métrica o distancia d.

A todos los vectores del espacio dual L^* del espacio de las funciones prueba (o sea, a los funcionales lineales continuos $F:\mathcal{D}\to\mathbb{k}$), se les define como funciones generalizadas.

En el espacio dual L^* pueden existir tres tipos de vectores o elementos:

1) funcionales lineales continuos $F\in L^*$ **generados** por un vector prueba $f\in\mathcal{D}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{k}$, a través de la siguiente expresión en términos de la integral de Lebesgue (o, más generalmente, Lebesgue-Stieltjes):

$$F(\varphi)\equiv F_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}\,;$$

se denominan como *funciones generalizadas normales* o, simplemente, *funciones normales*, pues en la práctica se identifican $F\equiv F_f\in L^*$ y su generador $f\in L$, es decir, se dice que $F\in L^*$ *es una función normal* (en rigor, F_f se identifica con todas todas las $g\in L$ que satisfagan $g\triangleq f$). Las funciones normales *originales,* $f\in L$, pasan entonces a ser consideradas como un caso particular de las generalizadas, y para su obtención basta calcular el funcional $F(\varphi)\equiv F_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ sobre todas las funciones φ de la clase de funciones de prueba $\mathcal{D}$ utilizada.

2) funcionales lineales continuos $F\in L^*$ **generados** por una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{k}$ que no es de prueba, $f\notin\mathcal{D}$, a través de la siguiente expresión en términos de la integral de Lebesgue (Lebesgue-Stieltjes):

$$F(\varphi)\equiv F_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathcal{D} \;\;,\;\; f\notin\mathcal{D}\,;$$

se denominan como *funciones generalizadas regulares*.

3) funcionales lineales continuos $F\in L^*$ **no generados** por ninguna **función** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{k}$ según una expresión como las anteriores:

$$\nexists f\in\mathcal{D},\quad \nexists f:\mathbb{R}\to\mathbb{k} \;\;/\;\; F(\varphi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx\,;$$

se denominan como *funciones generalizadas singulares*.

De esta manera, puede decirse que L^* es una generalización del conjunto de funciones o vectores de L que pueden *generar* elementos de L^*, ya que *contiene*, además de las que sí pueden generar algún funcional (al hablar así estamos asumiendo la identificación $F_f\equiv f$), otros funcionales (lineales continuos) que permiten calcular funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{k}$ que no están en L (y que también pueden ser obtenidas vía una expresión integral como las anteriores). Por ello, queda justificada la denominación como *funciones* *generalizadas* de los elementos $F \in L^*$ (los funcionales lineales continuos sobre las funciones prueba).

● Nota: obsérvese que, según lo dicho, existen funciones generalizadas que no son *identificables* con vectores de L.

Una buena elección de $L = (\mathcal{D}, \tau)$ conducirá a un espacio L^* cuyos vectores (funciones generalizadas) compartan muchas propiedades con L y, además, permita determinadas operaciones y cálculos no posibles para las funciones originales en L.

3. Notación bilineal

El funcional lineal continuo que constituye una función generalizada particular se nota en la denominada notación bilineal como $\left(F_f \rightleftarrows f\right) \equiv \langle f \,|\, \bullet \rangle$, mientras que $\langle f \,|\, \varphi \rangle$ denota el valor del funcional en una determinada función prueba φ, esto es, $\langle f \,|\, \varphi \rangle = F_f(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}$.

Si $\langle f \,|\, \bullet \rangle$ representa la función generalizada $F \rightleftarrows f$, entonces el símbolo $\alpha f + \beta g$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, representa la función generalizada $\langle \alpha f + \beta g \,|\, \bullet \rangle$, de valor $\langle \alpha f + \beta g \,|\, \varphi \rangle = \alpha \langle f \,|\, \varphi \rangle + \beta \langle g \,|\, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Si $\langle f \,|\, \bullet \rangle$ representa la función generalizada $f \rightleftarrows F$, entonces su conjugada $f^* \rightleftarrows F^*$ es, por definición, la función generalizada de valor $\langle f^* \,|\, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$, que se simboliza como $\langle f^* \,|\, \bullet \rangle$ ($\langle f^* \,|\, \varphi \rangle \not\equiv \left(\langle f \,|\, \varphi \rangle\right)^*$).

● Es decir: para una función normal, por ejemplo, $F_f = \langle f \,|\, \bullet \rangle$, generada por la función prueba $f \in \mathcal{D}$, su función generalizada conjugada se define:

$$F_f^*(\varphi) = \left[F_f(\varphi^*)\right]^* = F_{f^*}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f^*(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle f^* \,|\, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

teniéndose (en este caso la integral es la usual de Lebesgue-Stieltjes) que

$$F_f^*(\varphi) = F_{f^*}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f^*(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle f^* \,|\, \varphi \rangle \not\equiv \left[F_f(\varphi)\right]^* = \int_{\mathbb{R}} f^*(x)\,\varphi^*(x)\,dx = \left(\langle f \,|\, \varphi \rangle\right)^*.$$

● Notas: obsérvese que, asumida la notación bilineal, se tiene que:

1) f no representa necesariamente una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{k}$; es decir, puede serlo o no; en general, una función generalizada $f \rightleftarrows F$ es una función $F : \mathcal{D} \to \mathbb{k}$, funcional lineal acotado sobre $\mathcal{D}$.

2) $\langle f \,|\, \varphi \rangle$ no representa en general un producto escalar; tampoco, incluso si está indicando una integración de Lebesgue(-Stieltjes) sobre $\mathbb{R}$, se conjuga la f (recuérdese que en el $\langle f, \varphi \rangle$ en $L^2(\mathbb{R})$ aparece la f conjugada en la integración); en este sentido, la notación bilineal usual en teoría de distribuciones no debe confundirse con la de Dirac en $L^2(\mathbb{R})$.

3) $\langle f(x+a) \,|\, \varphi(x) \rangle,\ a \in \mathbb{R}$, es $\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x-a)\,dx = \langle f(x) \,|\, \varphi(x-a) \rangle$.

4. Funciones generalizadas: definiciones y propiedades

Dados un espacio lineal topológico $L=(\mathcal{D},\tau)\equiv\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con vectores o funciones prueba $\varphi\in\mathcal{D}$, $\varphi:\mathbb{R}\to\Bbbk$, y su dual $L^*\equiv\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, con vectores o funciones generalizadas $F:\mathcal{D}\to\Bbbk$ (funcionales lineales acotados):

- Linealidad:

$$F(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha F(\varphi_1)+\beta F(\varphi_2),\ \forall F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \forall\varphi_i\in\mathcal{D},\ \forall\alpha,\beta\in\Bbbk.$$

- Continuidad: $\left(\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi\right)\ \Rightarrow\ \left(F(\varphi_n)\xrightarrow{\Bbbk}F(\varphi)\right)$.

- Producto por una función:

$$\rho\ F:\mathcal{D}\to\Bbbk\ /\ (\rho\ F)(\varphi)=F(\rho\varphi),\ \ F\in\mathcal{D}',\ \ \forall\varphi,\rho\in\mathcal{D}\ ,$$

teniéndose $\rho F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- Derivada:

$$F^{(n)}\equiv\frac{d^nF}{dx^n}:\mathcal{D}\to\Bbbk\ /\ F^{(n)}(\varphi)=F\ \left((-1)^n\varphi^{(n)}\right),\ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

- Translación:

$$F_a:\mathcal{D}\to\Bbbk\ /\ F_a(\varphi)=F\ (\varphi_{-a}),\ \ \varphi_a(x)=\varphi(x-a),\ \forall\varphi\in\mathcal{D},\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

- Convergencia en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: dada $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^*$,

$$F_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}F\Leftrightarrow F_n(\varphi)\xrightarrow{\Bbbk}F(\varphi),\ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

5. Clase $\mathcal{D}\equiv(C_0^\infty(\mathbb{R}),\tau)$ de funciones prueba

Se define el *soporte* de una función como la clausura del conjunto sobre el que $\varphi(x)\neq 0$ (esto es: el complementario del mayor abierto en $\mathbb{R}$ sobre el que $\varphi(x)=0$).

Una función se dice que tiene *soporte compacto* si se anula fuera de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Se define como $\mathcal{D}\equiv C_0^\infty(\mathbb{R})$, *espacio de prueba de las funciones de soporte compacto*, el espacio lineal constituido por todas las funciones prueba $\varphi:\mathbb{R}\to\Bbbk$ tales que cumplen:

1) $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$: es continua y posee derivadas continuas de cualquier orden,

2) φ y todas sus derivadas poseen soporte compacto (puede ser **distinto** para cada función φ o derivada suya φ^n de un orden n dado).

▶ Todas las funciones prueba $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y sus derivadas de cualquier orden son funciones continuas, se anulan para $|x| \to \infty$ y son integrable Lebesgue (-Stieltjes) sobre $\mathbb{R}$.

⌖ Sobre $\mathcal{D} \equiv C_0^\infty(\mathbb{R})$ se puede definir una topología τ que origina un espacio lineal topológico $\mathcal{D} \equiv (C_0^\infty(\mathbb{R}), \tau)$, no metrizable y satisfaciendo el primer axioma de numerabilidad(*).

(*) Un espacio topológico satisface el primer axioma de numerabilidad si en cada punto existe una base numerable (todo espacio métrico lo satisface); se define una base en un punto como una colección de abiertos tal que para todo conjunto abierto que contenga al punto existe algún miembro de la colección que contiene al punto y está contenido en el abierto (*tema 1*).

▶ Por satisfacerse el primer axioma de numerabilidad, para caracterizar la topología τ basta definir el criterio de convergencia (en τ, convergencia usual o fuerte) de las sucesiones φ_n de vectores del espacio:

⌖ Una sucesión $\varphi_n \subset \mathcal{D} \equiv (C_0^\infty(\mathbb{R}), \tau)$ de funciones prueba converge a un límite $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi_n \to \varphi$ ($\equiv \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \equiv \varphi_n \xrightarrow{f} \varphi$, convergencia fuerte), si y sólo si:

1) cada φ_n se anula fuera del **mismo** conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}$.

2) φ_n y todas sus derivadas convergen uniforme (en el sentido usual de convergencia uniforme(Δ)) y respectivamente hacia la función $\varphi \in \mathcal{D}$ y sus correspondientes derivadas:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ :\ \left| \frac{d^m}{dx^m}(\varphi_n(x) - \varphi(x)) \right| < \varepsilon \quad \forall m = 0,1,2\ldots,\ \ n \geq n_0,\ \ n_0 \neq n_0(x)\,.$$

(Δ) Dada la sucesión de funciones $\varphi_n \in \mathcal{D}$, se dice que converge uniformemente (en $\mathbb{R}$) a $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi_n, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{k}$, sii $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0,\ \ n_0 \neq n_0(x)$.

● Obsérvese que, hecha la anterior definición, el requisito de continuidad(◇) de los funcionales lineales queda fijado:

$\langle f \,|\bullet\rangle \equiv F_f \equiv f \in L^*$ es continuo (en τ)

$$\Leftrightarrow \left(\varphi_n \to \varphi \ \Rightarrow\ \left(\langle f \,|\, \varphi_n \rangle \xrightarrow{(\mathbb{k})} \langle f \,|\, \varphi \rangle \ \equiv\ F_f(\varphi_n) \xrightarrow{(\mathbb{k})} F_f(\varphi) \right) \right).$$

(◇) De hecho, el dual algebraico de $\mathcal{D} \equiv C_0^\infty(\mathbb{R})$ contiene funcionales lineales no continuos.

● Nota: definiciones de convergencia diferentes llevaran a espacios topológicos $L = (\mathcal{D}, \tau')$ diferentes, cambiando en consecuencia las funciones generalizadas.

6. Clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \equiv (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \tau_{\mathcal{S}})$ de funciones prueba

Se define como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *espacio de prueba de las funciones de decrecimiento rápido*, el espacio lineal constituido por todas las funciones prueba $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{k}$ tales que cumplen:

1) $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$: es continua y posee derivadas continuas de cualquier orden,

2) $\left| x^k \dfrac{d^m \varphi}{dx^m} \right| \leq c_{km}, \forall k, m = 0,1,2\ldots$, siendo c_{km} unas constantes reales,

teniéndose entonces que

$$\sup_{n \leq N} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|^2)^N \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \right) < \infty, \forall N = 0,1\ldots$$

(es decir, φ y todas sus derivadas decrecen más deprisa que cualquier polinomio).

Las funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sus derivadas y el producto de un polinomio por ellas pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$; $\mathcal{D} < \mathcal{S}$.

Sobre $\mathcal{S}$ se puede definir una topología $\tau_{\mathcal{S}}$ que origina un espacio lineal topológico $\mathcal{S} \equiv (\mathcal{S}, \tau_{\mathcal{S}})$ que satisface el primer axioma de numerabilidad(*).

(*) Un espacio topológico satisface el primer axioma de numerabilidad si en cada punto existe una base numerable (todo espacio métrico lo satisface); se define una base en un punto como una colección de abiertos tal que para todo conjunto abierto que contenga al punto existe algún miembro de la colección que contiene al punto y está contenido en el abierto (*tema 1*).

Por satisfacerse el primer axioma de numerabilidad, para caracterizar la topología $\tau_{\mathcal{S}}$ basta definir el criterio de convergencia (en $\tau_{\mathcal{S}}$, convergencia usual o fuerte) de las sucesiones φ_n de vectores del espacio:

Una sucesión $\varphi_n \subset \mathcal{S}$ de funciones prueba converge a un límite $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi_n \to \varphi$ ($\equiv \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \equiv \varphi_n \xrightarrow{f} \varphi$, convergencia fuerte), si y sólo si:

1) $\left| x^k \dfrac{d^m \varphi_n}{dx^m} \right| \leq c_{km}, \forall k, m = 0,1,2\ldots$, con constantes c_{km} independientes de n.

2) φ_n y todas sus derivadas convergen uniforme y respectivamente, sobre cualquier conjunto acotado de $\mathbb{R}$, hacia la función $\varphi \in \mathcal{S}$ y sus correspondientes derivadas.

- $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{S}$ (con la topología $\tau_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$); $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$.
- $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$; $\varphi(x) = e^{-x^2} \notin \mathcal{D}$.

FIN DEL SEMINARIO

■ Distribuciones

7. Distribuciones

⌖ Las funciones generalizadas $F:\mathcal{D}\to\Bbbk$ sobre $\mathcal{D}\equiv(C_0^\infty(\mathbb{R}),\tau)$, espacio de prueba de las funciones de soporte compacto (o espacio lineal de las funciones infinitamente diferenciables que se anulan **cada una** fuera de un **determinado** intervalo finito específico asociado), siendo τ la topología inherente a la definición de convergencia de sucesiones $\varphi_n\to\varphi$ establecida anteriormente (p. 12), se denominan *distribuciones*.

- Por ejemplo: los elementos del espacio $L^2(\mathbb{R})$ pueden considerarse como distribuciones(*).

(*) Se supera así la arbitrariedad de tener que optar por elegir un representante de cada una de las clases de equivalencia que surgen al considerar funciones que sólo difieren entre sí sobre conjuntos de medida nula.

⌖ Las distribuciones constituyen un espacio lineal (de funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{D}$, $F:\mathcal{D}\to\Bbbk$) denominado $\mathcal{D}'(\mathbb{R})\equiv\mathcal{D}^*$.

8. Ejemplos de distribuciones

8.1. La delta de Dirac

8.1.1. Origen y expresión

⌖ Dirac introdujo la *transformación delta de Dirac*, $\delta(x)$ (que **no es** *función normal*, $\delta(x)\not\asymp\delta(x):\mathbb{R}\to\Bbbk$, sino distribución $\delta\rightleftarrows\Delta\in\mathcal{D}'$), asumiendo valores y propiedades según:

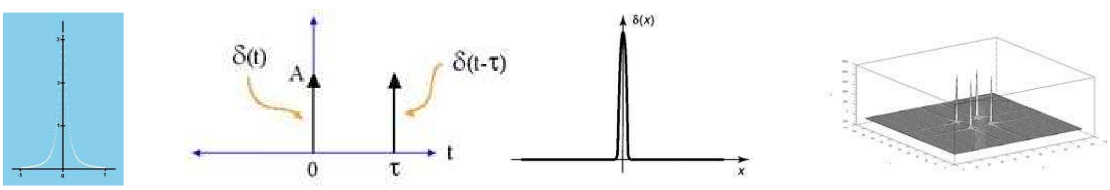
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0)\quad\equiv\quad\Delta(\varphi)=\langle\delta\,|\,\varphi\rangle=\varphi(0)$,

para toda función continua $\varphi(x):\mathbb{R}\to\Bbbk$; en particular,

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1\quad\equiv\quad\Delta(1)=\langle\delta\,|\,1\rangle=1$;

también, más generalmente:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\,,\quad a\in\mathbb{R}\quad\equiv\quad\Delta_a(\varphi)=\langle\delta_a\,|\,\varphi\rangle=\varphi(a)\,,\quad\delta_a(x)=\delta(x-a)\,,\ a\in\mathbb{R}.$
- Representaciones gráficas usuales son:



(figuras sacadas de Internet, donde se puede encontrar una amplia variedad).

⌖ Además, $\delta(x)$ es supuesto permitiendo la integración por partes según:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-a)\,\varphi(x)\,dx = -\varphi'(a)\,, \quad a\in\mathbb{R}\,,$

para cualquier función diferenciable $\varphi(x)$; expresiones similares para derivadas de mayor orden de $\delta(x)$, por ejemplo,

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta''(x-a)\,\varphi(x)\,dx = \varphi''(a)\,, \quad a\in\mathbb{R}\,.$

⌖ Adicionalmente, para una función $f(x)$ que no sea continuamente diferenciable en el sentido usual (por ejemplo, para una función continua a trozos), Dirac introdujo su derivada en un sentido *generalizado* como la *función* (tampoco lo es rigurosamente) $f'(x)$ que satisface

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx\,,$

al menos para toda función $\varphi(x)$ que sea continuamente diferenciable $\forall x$ e idénticamente nula excepto en un subintervalo finito de $\mathbb{R}$.

Dirac denominó a $\delta(x)$, $\delta'(x)$ y $f'(x)$ como "funciones impropias", señalando que, aunque pudieran no tener ellas mismas valores bien definidos sin embargo, el valor de las integrales en que aparecen como factores en el integrando, sí está frecuentemente bien definido.

- Aunque no existe ninguna función $\delta(x)$ que satisfaga las anteriores expresiones, a veces se habla de la delta como una función definida según $\delta(x)=\begin{cases} 0\,, & x\neq 0\,, \\ +\infty\,, & x=0 \end{cases}$, uso justificado por el hecho de que el soporte de la delta es $\{0\}$.

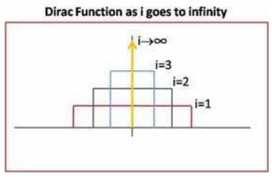
A partir de su introducción bosquejada por Dirac, Schwartz desarrollaría en 1950 la teoría de las distribuciones y funciones generalizadas, un nuevo campo del análisis matemático en que como hemos visto se dota de rigor matemático a los anteriores conceptos (y por el que se le otorgaría la medalla Fields). Así, las *funciones impropias* que introdujo Dirac quedarían establecidas como funciones generalizadas en la correspondiente teoría.

- En particular, la delta de Dirac constituye una función generalizada singular y, más específicamente, una distribución.

8.1.2. Ejemplos de sucesiones que convergen a la delta de Dirac

► Es posible encontrar sucesiones de funciones $\delta_\varepsilon(x)$ con integral en toda la recta real igual a 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$, y que tienen a la delta de Dirac como límite, $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) = \lim_{n\to\infty}\delta_n(x)$, denominándose como *representaciones de la delta*; por ejemplo:

(límite en sentido de distribuciones, $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{n=\frac{1}{\varepsilon}}(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0)\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}$, donde primero se hace la integral y luego se toma el límite, no al revés).



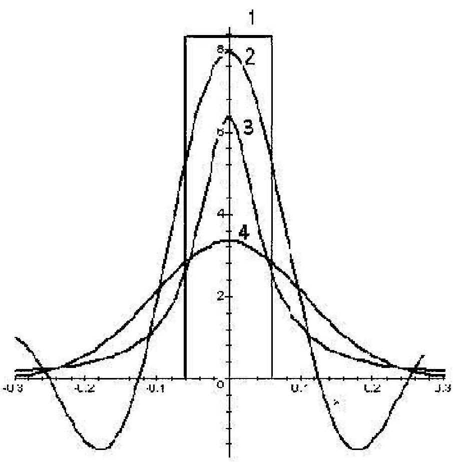
(http://www.reproducibility.org)

- **1.** (escalón): $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-\varepsilon/2,\varepsilon/2)\\ 1/\varepsilon, & x\in(-\varepsilon/2,\varepsilon/2)\end{cases}$,

sucesión integrada por funciones $\delta_{n=\frac{1}{\varepsilon}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, todas ellas (aunque son no continuas) con integral en $\mathbb{R}$ igual a 1;

- **2.** (pico difracción, con funciones singulares en el origen):
$$\delta_{\varepsilon=\frac{1}{n}}(x)=\frac{sen(x/\varepsilon)}{\pi x}=\frac{sen\,nx}{\pi x}\ ;$$
- **3.** (lorentziana, con funciones continuas): $\delta_\varepsilon(x)=\dfrac{\varepsilon/\pi}{(x^2+\varepsilon^2)}$;
- **4.** (gaussiana, con funciones analíticas): $\delta_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2}{\varepsilon^2}}$;

representaciones que se corresponden con las curvas de la siguiente figura:



(http://www.engr.unl.edu/~glibrary/home/whatisG/node7.html);

- **5.** (integral de Fourier): $\delta_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-n}^{+n}e^{ikx}\,dk$, teniéndose:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\,dk\quad,\quad\delta'(x)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}k\,e^{ikx}\,dk\quad,\quad\delta(x-a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(x-a)}\,dk\,.$$

► La delta de Dirac es, por tanto, una función generalizada singular, puesto que no existe ninguna función (normal) $\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{k}$ para la que se tenga $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\,d\,x=\varphi(0)$. Es decir, la forma correcta de definir la función generalizada delta de Dirac $\Delta(\varphi)$ es según $\Delta(\varphi)=\varphi(0)$ $\left(\rightleftarrows\delta(\varphi)=\varphi(0)\right)$, para la clase de funciones $\mathcal{D}\equiv C_0^\infty(\mathbb{R})$.

- Y, a partir de esta definición, es fácil comprobar que la delta de Dirac efectivamente constituye un funcional lineal acotado o función generalizada $\Delta(\varphi)$, definido *formalmente* por la ecuación

$$\Delta(\varphi)=\langle\delta\,|\,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\,d\,x=\varphi(0)\,,\quad \varphi\in\mathcal{D}\,,\quad a\in\mathbb{R}\,,$$

usualmente representada en Física por la notación simbólica $\delta(x)$ (pero este uso no debe llevar a confundirla con una función *normal*: no existe ninguna función $\delta(x)$ para la que la anterior expresión tenga lugar).

⊕ Otras expresiones (notación $\delta\rightleftarrows\Delta$ donde corresponda; $a,b\in\mathbb{R}$):

- $\Delta'(\varphi)=\langle\delta'\,|\,\varphi\rangle=-\varphi'(0)$; $\delta_a^{(n)}(\varphi)=(-1)^n\delta_a(x)\,\varphi^{(n)}(a)\,,\ n=0,1,2\ldots$
- $\langle\alpha\delta+\beta\delta'\,|\,\varphi\rangle=\alpha\,\varphi(0)-\beta\,\varphi'(0)\,;\ \alpha,\beta\in\mathbb{k}\,;\quad \delta'(x)=-\delta'(-x)\,.$
- $\langle\delta(ax+b)\,|\,\varphi(x)\rangle=\dfrac{1}{|a|}\varphi\left(-b/a\right)\,,\ a\neq 0$; $\quad\delta(x)\varphi(x)=\delta(x)\varphi(0)\,.$
- $\delta(x)=\delta(-x)$; $\delta(a\,x)=\dfrac{\delta(x)}{|\,a\,|}\,,\ a\neq 0$; $x\,\delta(x)=0\,.$
- $\delta(x-a)\,\varphi(x)=\delta(x-a)\,\varphi(a)\rightleftarrows\Delta_a(\varphi)=\Delta(\varphi_{-a})=\varphi_{-a}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\varphi(x)\,d\,x=\varphi(a)\,,\ \varphi\in\mathcal{D}\,.$
- $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{2|\,a\,|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]\,,\ a\neq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\delta(x-b)\,d\,x=\delta(a-b)\,,\,a\neq b\,.$

8.2. La distribución escalón de Heaviside

⊕ La distribución *escalón de Heaviside*, $\Theta(\varphi)$, se define según

$$\Theta(\varphi)=\langle\theta\,|\,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx\,,\ \forall\,\varphi\in\mathcal{D},$$

donde $\theta(x)$ es la función escalón de Heaviside, $\theta(x)=\begin{cases}0, & x<0\,,\\ 1, & x>0\,.\end{cases}$

- $\Theta_a(\varphi)=\Theta(\varphi_{-a})=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x-a)\,\varphi(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx\,,\forall\,\varphi\in\mathcal{D},\ a\in\mathbb{R}\,.$
- $\dfrac{d}{dx}\Theta(\varphi)=-\Theta(\varphi')=\varphi(0)=\Delta(\varphi)$ $\left(\rightleftarrows\dfrac{d}{dx}\theta(x)=\delta(x)\right)$, siempre en sentido de distribuciones: dada la función generalizada F, se define su derivada primera como la función generalizada $\dfrac{dF}{dx}(\varphi)=-F(\varphi')$ (*cf*. p. 12).
- $\dfrac{d}{dx}\Theta_a(\varphi)=-\Theta_a(\varphi')=\varphi(a)=\Delta_a(\varphi)\,,\quad a\in\mathbb{R}$ $\left(\rightleftarrows\dfrac{d}{dx}\theta_a(x)=\delta_a(x)=\delta(x-a)\right)$.

9. Funciones generalizadas y transformada de Fourier

9.1. Distribuciones temperadas

Las funciones generalizadas $F:\mathcal{S}\to\mathbb{k}$ sobre $\mathcal{S}\equiv(\mathcal{S},\tau_{\mathcal{S}})$, espacio de prueba de las funciones de decrecimiento rápido, se denominan *distribuciones temperadas*.

Las distribuciones temperadas $F:\mathcal{S}\to\mathbb{k}$ constituyen un espacio lineal (de funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{S}\equiv(\mathcal{S},\tau_{\mathcal{S}})$), denominado $\mathcal{S}'(\mathbb{R})\equiv\mathcal{S}^*$.

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es isomorfo con un subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $\mathcal{S}^*<\mathcal{D}^*$.

9.2. La tranformación de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

La transformación de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se define como la aplicación lineal continua $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ definida según:

$$\mathcal{F}(k)\equiv(\mathcal{F}\varphi)(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ikx}\varphi(x)\,dx\ ,\ k\in\mathbb{R}\ ,\ \forall\varphi\in\mathcal{S}\ .$$

La transformación inversa de Fourier se define según:

$$\mathcal{F}^{(-1)}(x)\equiv(\mathcal{F}^{(-1)}\varphi)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{+ikx}\varphi(k)\,dk\ ,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ \forall\varphi\in\mathcal{S}\ .$$

- $\varphi\in\mathcal{S}\Rightarrow\mathcal{F}\varphi\in\mathcal{S},\mathcal{F}^{(-1)}\varphi\in\mathcal{S}$; $(\mathcal{F}\mathcal{F}^{(-1)})\varphi=(\mathcal{F}^{(-1)}\mathcal{F})\varphi=\varphi\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{S}$.

- La transformación de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se extiende a una isometría lineal de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ en $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, constituyendo un operador unitario en este espacio.

La transformación de Fourier en $\mathcal{S}^*$ (de una distribución temperada) se define como:

$$(\mathcal{F}F)(\varphi)=F\left(\mathcal{F}\varphi\right)\ ,\ (\mathcal{F}^{(-1)}F)(\varphi)=F\left(\mathcal{F}^{(-1)}\varphi\right),\ \forall F\in\mathcal{S}^*\ ,\ \forall\varphi\in\mathcal{S}\ .$$

BIBLIOGRAFÍA (funciones generalizadas)

- **R. P. Kanwall, Generalized functions (theory and technique), Academic Press, 1983.**
- **A. N. Kolmogórov y S.V. Fomín, Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, M.I.R., 1975.**
- **R. D. Richtmyer, Principles of Advanced Mathematical Physics, vol. 1, Springer Verlag, 1978.**
- **P. Roman, Some modern mathematics for physicists and other outsiders, vol. 2, Appendix II, Pergamon, 1975.**