MÉTODOS MATEMÁTICOS III
ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Profesora: Mª Cruz Boscá

TEMA 6: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ESPECTRAL

◈ **En todo el tema: Sea $T : D(T) < H \to H$ un operador lineal, con dominio denso en H, $\overline{D(T)} = H$, y recorrido $R(T) < H$, siendo H un espacio de Hilbert complejo $(\mathbb{k} = \mathbb{C})$ y separable.**

■ Invariancia de espacios y reducibilidad de operadores

⊕ Dado el subespacio $M \lhd H$, $M \neq H$, $M \neq \{0\}$, se define M como ***subespacio invariante bajo el operador lineal*** T $\Leftrightarrow$
$Tx \in M \quad \forall x \in D(T) \cap M$.

⊕ Dados $M \lhd H$, $T : D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, y P_M, proyector ortogonal sobre M ,entonces M ***reduce completamente***, o ***reduce***, ***a*** T (o, equivalentemente, $M^{\perp}$ ***reduce completamente***, o ***reduce***, ***a*** T) $\Leftrightarrow$

a) $P_M(D(T)) \subset D(T)$ y $P_{M^{\perp}}(D(T)) \subset D(T)$.

b) $\exists\ T_M : D(T_M) = P_M(D(T)) = M \cap D(T) \to H$, operador lineal, y

$\exists\ T_{M^{\perp}} : D(T_{M^{\perp}}) = P_{M^{\perp}}(D(T)) = M^{\perp} \cap D(T) \to H$, operador lineal, tales que

$Tx = T_M(P_M x) + T_{M^{\perp}}(P_{M^{\perp}} x) \quad \forall x \in D(T)$.

- $T_M \equiv$ *operador inducido por* T *en* $M \equiv$ restricción de T a M .
- $T_{M^{\perp}} \equiv$ *operador inducido por* T *en* $M^{\perp} \equiv$ restricción T a $M^{\perp}$.

▶ Propiedades:
- M y $M^{\perp}$ son invariantes bajo T
- T_M y $T_{M^{\perp}}$ son únicos
- $Tx = T_M x \quad \forall x \in M \cap D(T)$ y $Tx = T_{M^{\perp}} x \quad \forall x \in M^{\perp} \cap D(T)$

- Notación: cuando M reduce a T , notamos $T = T_M \oplus T_{M^{\perp}}$, $T_M \subset TP_M$ y $T_{M^{\perp}} \subset TP_{M^{\perp}} = T(I - P_M)$.

▶ Dados $T: D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, $M \lhd H$ y P_M, proyector ortogonal sobre M, entonces M reduce a T $\Leftrightarrow$ $P_M(D(T)) \subset D(T)$ y M y $M^{\perp}$ son invariantes bajo $T \Leftrightarrow P_M T \subset T P_M$ ($\equiv P_M$ y T permutan) $\Leftrightarrow$ $P_M(D(T)) \subset D(T)$ y $P_M Tx \subset TP_M x \ \ \forall x \in D(T)$.

⌖ Dado $T: D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, se define como ***operador irreducible*** *sii* $\nexists M \lhd H$ / M reduzca a T.

▶ Dados $T: D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, y $M \lhd H$ tal que reduce a T $\Rightarrow$

- T unitario $\Rightarrow$ T_M y $T_{M^{\perp}}$ unitarios.
- T autoadjunto $\Rightarrow$ T_M y $T_{M^{\perp}}$ autoadjuntos.

▶ Dados $A \in \mathcal{A}(H)$ y $M \lhd H$, entonces M reduce a $A \Leftrightarrow M$ es invariante bajo A $\Leftrightarrow$ M es invariantes bajo A y A^{+}.

▶ Dados $U: H \to H$, operador unitario, y $M \lhd H$, entonces M reduce a U $\Leftrightarrow$ $U(M) = M$ $\Leftrightarrow$ M es invariante bajo U y U^{-1}.

■ Resolvente y espectro de un operador lineal

⌖ Dado $T: D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, se define la ***resolvente de*** T ***en*** λ, $\mathcal{R}_T(\lambda) \equiv \mathcal{R}_\lambda$, como la *relación* específica (operador lineal en su caso), para un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ dado, de la familia no numerable $\mathcal{R}_\lambda = T_\lambda^{(-1)} = (T - \lambda I)^{(-1)}$, definida $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, donde:
$T_\lambda = (T - \lambda I)$, con $D(T_\lambda) = D(T - \lambda I) = D(T)$, $T_\lambda \in \mathcal{L}(D(T - \lambda I), R(T - \lambda I))$, y, cuando existe, $T_\lambda^{-1}: R(T - \lambda I) < H \to D(T - \lambda I) < H$.

⌖ De acuerdo con las propiedades de $\mathcal{R}_\lambda = T_\lambda^{(-1)} = (T - \lambda I)^{(-1)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, los números complejos λ se clasifican en **4** clases:

- Si $T_\lambda^{(-1)} \notin \mathcal{L}(R(T - \lambda I), D(T - \lambda I))$ $\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T) \equiv \lambda \in$ al ***espectro puntual de*** T, $\sigma_p(T)$.
- Si $T_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(R(T - \lambda I), D(T - \lambda I))$ y $\overline{D(T_\lambda^{-1})} = \overline{R(T - \lambda I)} \neq H \Rightarrow \lambda \in \sigma_r(T) \equiv$ $\lambda \in$ al ***espectro residual de*** T, $\sigma_r(T)$.
- Si $T_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(R(T - \lambda I), D(T - \lambda I))$, $\overline{D(T_\lambda^{-1})} = H$ y $T_\lambda^{-1} \notin \mathcal{A}(R(T - \lambda I))$ $\Rightarrow \lambda \in \sigma_c(T) \equiv$ $\lambda \in$ al ***espectro continuo de*** T, $\sigma_c(T)$.
- La unión de $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ define el ***espectro de*** T, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$, o conjunto de **puntos espectrales**.
- Si $T_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(R(T - \lambda I), D(T - \lambda I))$, $\overline{D(T_\lambda^{-1})} = H$ y $T_\lambda^{-1} \in \mathcal{A}(R(T - \lambda I))$ $\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \equiv$ $\lambda \in$ a la ***resolvente de*** T, $\rho(T)$, *es un* ***punto regular***.

▶ Dado $T: D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, los cuatro conjuntos $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\rho(T)$ **son disjuntos dos a dos**.

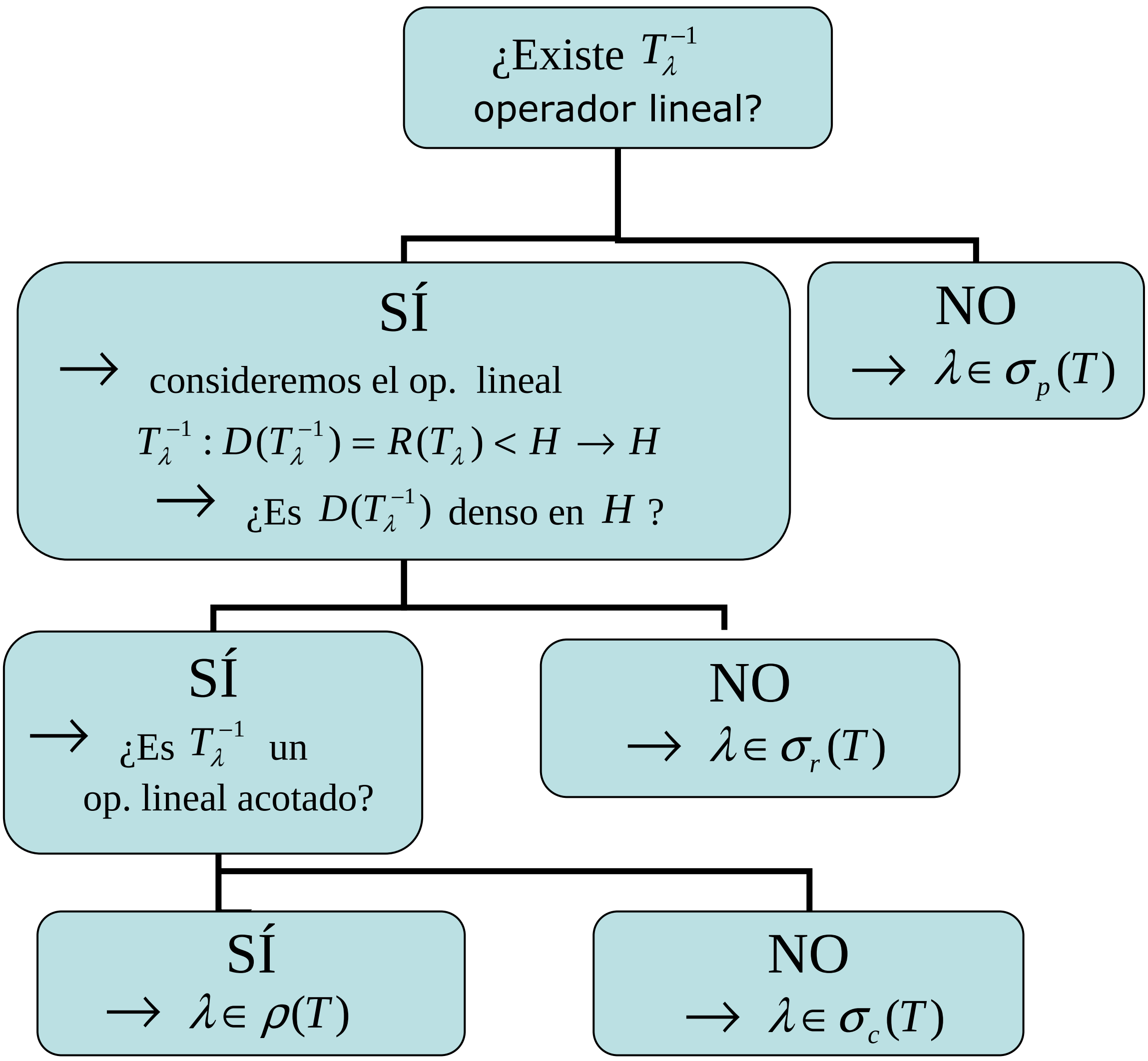
▶ $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$ y $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$.

Esquema de clasificación de puntos de $\mathbb{C}$:

$\lambda \in \mathbb{C}$	$T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$	$T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$	$T_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(R(T-\lambda I))\,;\, D(T_\lambda^{-1})=R(T_\lambda)$
$\in \sigma_p(T)$	$\notin \mathcal{L}(R(T-\lambda I))$	$\notin \mathcal{L}(R(T-\lambda I))$	no
$\in \sigma_r(T)$	$\in \mathcal{L}(R(T-\lambda I))$	acot. o no	$\overline{D(T_\lambda^{-1})} \neq H$
$\in \sigma_c(T)$	$\in \mathcal{L}(R(T-\lambda I))$	$\notin \mathcal{A}(R(T-\lambda I))$	$\overline{D(T_\lambda^{-1})} = H$
$\in \rho(T)$	$\in \mathcal{L}(R(T-\lambda I))$	$\in \mathcal{A}(R(T-\lambda I))$	$\overline{D(T_\lambda^{-1})} = H$

- $\lambda \in \mathbb{C}$ es un ***punto regular*** de T *sii* $\lambda \in \rho(T)$.
- $\lambda \in \mathbb{C}$ es un ***punto espectral*** de T *sii* $\lambda \in \sigma(T)$.

Esquema de procedimiento para la clasificación:



Nota: el orden en las disyuntivas ha de respetarse escrupulosamente.

Caracterización topológica de $\rho(T)$ y $\sigma(T)$

- $T: D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H \Rightarrow \sigma(T)$ cerrado, $\rho(T)$ abierto; ni $\sigma_p(T)$ ha de ser discreto, ni $\sigma_c(T)$ ha de ser continuo.
- Dado $T \in \mathcal{A}(H)$, o $T: D(T) = H \to H$ operador lineal cerrado $\Rightarrow \sigma(T)$ está contenido en un círculo de radio finito en torno a $\lambda = 0$.
- Operadores lineales acotados $A \in \mathcal{A}(H)$, y cerrados con $D(T) = H$ (que son siempre acotados en un espacio completo, *cf.* teorema gráfico cerrado):
  - Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, o $A: D(A) = H \to H$ operador lineal cerrado, se define su ***radio espectral***, $r_\sigma(A)$, según $r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma(A)\}$, es decir, el radio (finito) del menor disco centrado en el origen que contiene a $\sigma(A)$.
  - $\sigma(A) \neq \varnothing$; $\rho(A) \neq \varnothing$.

    (Nota: existen $T \notin \mathcal{A}(H)$ con $\sigma(A) = \varnothing$; otros con $\rho(A) = \varnothing$).
  - $\sigma(A)$ es cerrado y acotado $\Rightarrow \sigma(A)$ es compacto y $\sigma(A) \subset B[0, \|A\|]$.
  - $r_\sigma(A) \leq \|A\|$; $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$; $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.
  - ($\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{A}(H)$).
  - $\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| > \|A\| \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lambda \in \rho(A)$ y $-\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k = (A - \lambda I)^{-1} = A_\lambda^{-1}$.
  - $A \in \mathcal{C}(H) \Rightarrow \sigma(A)$ es discreto .
  - Dado $S \subset \mathbb{C}$, compacto $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}(H) \ / \ \sigma(A) = S$.
- Dado $T: D(T) < H \to H$ operador lineal autoadjunto, o normal acotado con $D(T) = H$, o unitario $\Rightarrow \sigma_r(T) = \varnothing$.
- El espectro de un operador lineal unitario está integrado por escalares de módulo unidad.
- Caso $H = \mathbb{C}^n$ (dimensión finita):
  - $\sigma(T) \neq \varnothing$.
  - $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ y es discreto.
  - $\sigma(T)$ es un conjunto cerrado y acotado $\Rightarrow \sigma(T)$ es compacto.

Clasificación de puntos espectrales

Un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ es un ***valor propio*** o ***autovalor*** de T *sii* $\lambda \in \sigma_p(T)$.

- Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, es autovalor de $T \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \ / \ Ax = \lambda x$, denominado ***vector propio*** o ***autovector*** del operador T, correspondiente al autovalor λ.
- Dado el vector propio o autovector x del operador T, correspondiente al autovalor $\lambda \Rightarrow y = \alpha x, \ \alpha \in \mathbb{k}, \ \alpha \neq 0$, es también vector propio del operador T, correspondiente al mismo autovalor λ.
- Autovectores correspondientes a autovalores distintos son **linealmente independientes** entre sí.
- Dado un $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de T, se define la ***variedad lineal propia*** de λ, M_λ (no necesariamente cerrada), como $M_\lambda = \{x \in D(A) \ : \ Ax = \lambda x\} < H$.

⌖ Dado un $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de T, se define *su* ***degeneración*** o ***multiplicidad*** como la dimensión de la variedad lineal propia M_λ.
⌖ Dado un $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de T, se define el ***subespacio propio*** o ***autoespacio*** asociado o correspondiente a λ como el subespacio $\overline{M_\lambda} \lhd H$.

⌖ Un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ es un ***valor propio generalizado*** o ***autovalor generalizado*** de T $\Leftrightarrow$ $\exists \{x_n\}_{n\in N} \subset D(T),\ \|x_n\| = 1\ \forall n \in N\ :\ \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)x_n\| = 0$.
$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in D(T)\ :\ \|x\| = 1$ y $\|(A-\lambda I)x\| < \varepsilon$.

- Si $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \Rightarrow$ λ es un autovalor generalizado de T.
- Si λ es un autovalor generalizado de T $\Rightarrow$ $\lambda \in \sigma(T)$.

⌖ Se define el ***espectro generalizado*** o ***aproximado*** de T como $\pi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ \lambda \textit{ es un valor propio generalizado de } T\} \subset \sigma(T) \subset \mathbb{C}$.

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, $\lambda \in \pi(T) \setminus \sigma_p(T)$ $\Leftrightarrow$ $(T-\lambda I)^{-1} \notin \mathcal{A}(H)$ y $(T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Autoespacios, ortogonalidad y reducibilidad

▶ Dados dos autoespacios, $\overline{M_\lambda}$ y $\overline{M_{\lambda'}}$, correspondientes a autovalores distintos, $\lambda \neq \lambda'$, si ambos reducen a T $\Rightarrow$ $\overline{M_\lambda} \perp \overline{M_{\lambda'}}$.
▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal cerrado (también, por ser cerrados, dado $A \in \mathcal{A}(H)$; o dado $T : D(T) < H \to H$ operador lineal autoadjunto) $\Rightarrow$ $\overline{M_\lambda} = M_\lambda \lhd H$, $\forall \lambda \in \sigma_p(T)$.
▶ Dado $T : D(T) < H \to H$ operador autoadjunto, o T operador unitario:

- M_λ reduce a T.

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador hermítico ($\overline{D(T)} = H$, y válido también, por ser hermíticos, para autoadjuntos), o T operador isométrico, o T operador unitario:

- $\forall \lambda, \lambda' \in \sigma_p(T),\ \lambda \neq \lambda'\ :\ M_\lambda \perp M_{\lambda'}$.

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador hermítico ($\overline{D(T)} = H$, y válido también, por ser hermíticos, para autoadjuntos), o T operador normal acotado, o T operador unitario:

- $\overline{M_\lambda}$ reduce a T.
- $\forall \lambda, \lambda' \in \sigma_p(T),\ \lambda \neq \lambda' \Rightarrow \overline{M_\lambda} \perp \overline{M_{\lambda'}}$.

▶ Dado H separable y $T : D(T) < H \to H$, operador lineal cerrado $\Rightarrow$ $\forall \lambda \in \sigma_p(T)\ :\ \overline{M_\lambda} = M_\lambda$ y M_λ es un Hilbert separable; por tanto, $\exists \{e_n\}_{n\in N} \subset M_\lambda$, b.o.n. de M_λ.

▶ Dado H (separable o no) y $T: D(T) < H \to H$, operador lineal acotado autoadjunto $\Rightarrow$ $\forall \lambda \in \sigma_p(T)$: $\overline{M_\lambda} = M_\lambda$ y M_λ es un Hilbert separable; por tanto, $\exists \{e_n\}_{n\in N} \subset M_\lambda$, b.o.n. de M_λ.

▶ Dado $T: D(T) < H \to H$, operador lineal reducible (o sea, $\exists M \lhd H$ que lo reduce) $\Rightarrow$

- $T = T_M \oplus T_{M^\perp}$
- $\sigma(T) = \sigma(T_M) \cup \sigma(T_{M^\perp})$
- $\sigma_p(T) = \sigma_p(T_M) \cup \sigma_p(T_{M^\perp})$
- Si $\sigma(T_M) \cap \sigma(T_{M^\perp}) = \varnothing$, entonces $\Rightarrow$

  $\sigma_c(T) = \sigma_c(T_M) \cup \sigma_c(T_{M^\perp})$ y $\sigma_r(T) = \sigma_r(T_M) \cup \sigma_r(T_{M^\perp})$.

Criterios para la determinación del espectro

■ Caso de operadores lineales sobre $H = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{A}(H = \mathbb{C}^n)$ (dimensión n finita):

- $\sigma(A) = \sigma_p(A) \neq \varnothing$ y es discreto; $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \varnothing$.
- $\sigma_p(A)$ se halla obteniendo las raíces de la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$.

■ Caso general: usualmente, complicado (es frecuente tener que recurrir a métodos aproximados…).

- Conveniente en la mayoría de los casos: estudiar extensiones del operador dado, comparando los respectivos espectros. Para ello son útiles los siguientes resultados:

▶ Dado $T: D(T) < H \to H$, operador lineal cerrado $\Rightarrow$ $\forall \lambda \notin \sigma_p(A)$ se tiene que $\mathcal{R}_\lambda(A) = A_\lambda^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}$ es un operador lineal cerrado.

▶ Dado $T: D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, y una extensión $T_{ext} \supset T$ del mismo ($D(T_{ext}) \supset D(T)$; $T_{ext}x = Tx \ \forall x \in D(T)$), entonces $\Rightarrow$

- $R(T_\lambda) \subset R(T_{ext\lambda})$
- si existen ambos como operadores lineales, $T_\lambda^{-1} \subset T_{ext\lambda}^{-1}$
- $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T_{ext})$
- $\sigma_r(T) \supset \sigma_r(T_{ext})$
- puntos de $\sigma_c(T)$ pueden moverse a $\sigma_p(T_{ext})$
- puntos de $\rho(T)$ pueden moverse a $\sigma_p(T_{ext}) \cup \sigma_c(T_{ext})$.
- puntos de $\sigma_r(T)$ pueden moverse a $\sigma_p(T_{ext}) \cup \sigma_c(T_{ext}) \cup \rho(T_{ext})$.

▶ Dado $T: D(T) < H \to H$, operador lineal cerrado con $\overline{D(T)} = H$ (también pues para $A \in \mathcal{A}(H)$) $\Rightarrow$

- $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(T^+) \cup \sigma_r(T^+)$
- $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \lambda^* \in \sigma_c(T^+)$
- $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(T^+)$
- $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \lambda^* \in \rho(T^+)$

- si T es normal acotado, entonces ($\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \lambda^* \in \sigma_p(T^+)$).

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, y dado $T_U = U^{-1}TU$, siendo U un operador unitario ($U^+ = U^{-1}$) tal que $U(D(T_U)) = D(T)$ (esto es, T y T_U son unitariamente equivalentes), entonces $\Rightarrow$

- $\sigma_p(T) = \sigma_p(T_U)$, $\sigma_c(T) = \sigma_c(T_U)$ y $\sigma_r(T) = \sigma_r(T_U)$
- todo autovalor (generalizado o no) de T_U lo es también de T .

■ Espectro de algunos tipos de operadores

Operadores hermíticos
(también, pues, op. esencialmente autoadjuntos y autoadjuntos)

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal hermítico ($\overline{D(T)} = H$):

- $\sigma_p \cup \sigma_c \subset \mathbb{R}$
- si $\sigma_r \neq \varnothing \Rightarrow (\lambda \in \sigma_r \Rightarrow \lambda \notin \mathbb{R})$, siendo entonces σ_r bien uno de los dos semiplanos complejos, bien ambos.
- dados $\lambda \in \sigma_p(T)$, $m(T) = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle x, Tx \rangle \geq -\infty$ y $M(T) = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle x, Tx \rangle \leq +\infty$ $\Rightarrow$
  $m(T) \leq \lambda \leq M(T)$.
- $\forall \lambda, \lambda' \in \sigma_p(T),\ \lambda \neq \lambda'$: $M_\lambda \perp M_{\lambda'}$.
- $\overline{M_\lambda}$ reduce a T .
- $\forall \lambda, \lambda' \in \sigma_p(T),\ \lambda \neq \lambda'$: $\overline{M_\lambda} \perp \overline{M_{\lambda'}}$.

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal hermítico ($\overline{D(T)} = H$) con $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ T es esencialmente autoadjunto.

Operadores esencialmente autoadjuntos
(también, por serlo, autoadjuntos)

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal esencialmente autoadjunto ($\overline{D(T)} = H$) $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Operadores autoadjuntos

▶ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal autoadjunto ($\overline{D(T)} = H$):

- $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.
- $\sigma_r(T) = \varnothing$: dado $\lambda \in \sigma(T)$, bien λ es autovalor de T , esto es, $\lambda \in \sigma_p(T)$, bien $\lambda \in \sigma_c(T)$ (siempre es autovalor generalizado de T).
- si $\nexists (T - \lambda I)^{-1}$ $\Rightarrow$ $\overline{R(T - \lambda I)} \neq H$ $\Rightarrow$ $\lambda \in \sigma_p(T)$.
- si $\exists (T - \lambda I)^{-1}$ y $R(T - \lambda I) = H$ $\Rightarrow$ $\lambda \in \rho(T)$.
- si $\exists (T - \lambda I)^{-1}$, $R(T - \lambda I) \neq H$ y $\overline{R(T - \lambda I)} = H$ $\Rightarrow$ $\lambda \in \sigma_c(T)$.

- $\overline{M_\lambda} = M_\lambda \lhd H$, $\forall \lambda \in \sigma_p(T)$.
- $\overline{M_\lambda}$ reduce a T .
- $\forall \lambda, \lambda' \in \sigma_p(T),\ \lambda \neq \lambda' \ \Rightarrow\ \overline{M_\lambda} \perp \overline{M_{\lambda'}}$.

▶ En un H separable, dado un operador T autoadjunto:

- el conjunto de autofunciones propias linealmente independientes asociadas a un autovalor $\lambda \in \sigma_p(T)$ puede ortonormalizarse, dando lugar a una base otonormal numerable del correspondiente autoespacio $\overline{M_\lambda} = M_\lambda$.
- el conjunto de autofunciones propias asociadas a todos los autovalores $\lambda \in \sigma_p(T)$ de un operador autoadjunto permite obtener un conjunto ortonormal que, en dimensión finita, constituye una b.o.n. de H .

▶ En dimensión finita, dados dos operadores autoadjuntos T_1 y T_2 existe una base ortonormal del espacio integrada por autovectores simultáneos de T_1 y T_2 .

Operadores acotados

▶ Dado $A \in \mathcal{A}(H)$:

- $\sigma(A) \neq \varnothing$; $\rho(A) \neq \varnothing$.
- $\sigma(A)$ es cerrado y acotado $\Rightarrow$ $\sigma(A)$ es compacto y $\sigma(A) \subset B[0, \|A\|]$.
- $r_\sigma(A) \leq \|A\|$; $\lambda \in \sigma(A) \ \Rightarrow\ |\lambda| \leq \|A\|$; $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.
- $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{A}(H)$.
- $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > \|A\| \ \underset{\cancel{\Leftarrow}}{\Rightarrow}\ \lambda \in \rho(A)$ y $-\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k = (A - \lambda I)^{-1} = A_\lambda^{-1}$.
- $\lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(A^+) \cup \sigma_r(A^+)$
- $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \lambda^* \in \sigma_c(A^+)$
- $\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(A^+)$
- $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \lambda^* \in \rho(A^+)$
- si A es normal, entonces ($\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \lambda^* \in \sigma_p(A^+)$).
- si A es autoadjunto, entonces A es positivo $\Leftrightarrow$ $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.

Operadores hermíticos acotados

(también, por serlo, autoadjuntos acotados)

▶ Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, operador hermítico acotado:

- $\sigma_r(A) = \varnothing$ y $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$.
- $m(A) = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$ y $M(A) = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$, $m(T) \leq \lambda \leq M(T)$ $\forall \lambda \in \sigma_p(T)$, son finitos y pertenecen el espectro, $m(A), M(A) \in \sigma(A)$.
- $\sigma(A) \subset [m(A), M(A)] \subset \mathbb{R}$

- $r_\sigma(A)=\|A\|$ (bien $m(A)=-\|A\|$, bien $M(A)=\|A\|$, bien ambos)
- $\sigma(A)\neq\varnothing$ y $\exists\lambda\neq 0:\lambda\in\sigma(A)$

Operadores autoadjuntos acotados

- Dado $A\in\mathcal{A}(H)$, operador autoadjunto acotado $\Rightarrow$ $\sigma(A)\neq\varnothing$ y
 $A\geq 0\Leftrightarrow\sigma(A)\subset[0,+\infty)$.
- Dado H (separable o no) y $T:D(T)<H\to H$, operador acotado autoadjunto $\Rightarrow$ $\forall\lambda\in\sigma_p(T)$: $\overline{M_\lambda}=M_\lambda$ y M_λ es un Hilbert separable; por tanto, $\exists\{e_n\}_{n\in N}\subset M_\lambda$, b.o.n. de M_λ.

Operadores normales acotados

- Dado $T:D(T)<H\to H$, operador lineal normal acotado:
  - $\sigma_r(U)=\varnothing$.
  - dado $\lambda\in\sigma(T)$ $\Rightarrow$ bien λ es autovalor de T, esto es, $\lambda\in\sigma_p(T)$, bien $\lambda\in\sigma_c(T)$ (siempre es autovalor generalizado de T).
  - $\overline{M_\lambda}=M_\lambda$ reduce a T, $\forall\lambda\in\sigma_p(T)$; $\forall\lambda,\lambda'\in\sigma_p(T),\ \lambda\neq\lambda'$ $\Rightarrow$ $\overline{M_\lambda}\perp\overline{M_{\lambda'}}$
  - si $\nexists(T-\lambda I)^{-1}$ $\Rightarrow$ $\overline{R(T-\lambda I)}\neq H$ $\Rightarrow$ $\lambda\in\sigma_p(T)$.
  - si $\exists(T-\lambda I)^{-1}$ y $R(T-\lambda I)=H$ $\Rightarrow$ $\lambda\in\rho(T)$.
  - si $\exists(T-\lambda I)^{-1}$, $R(T-\lambda I)\neq H$ y $\overline{R(T-\lambda I)}=H$ $\Rightarrow$ $\lambda\in\sigma_c(T)$.

Operadores isométricos

- Dado $A:H\to H$, operador lineal isométrico $\Rightarrow$ $\sigma_p(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ |\lambda|=1\}$.

Operadores unitarios

- Dado $U:H\to H$, operador lineal unitario $\Rightarrow$
  - $\sigma_r(U)=\varnothing$.
  - $\lambda\in\sigma(U)$ $\Rightarrow$ $|\lambda|=1$, *i.e.*: $\lambda=e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$.
  - $\sigma(U)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ |\lambda|=1\}$.
  - dado $\lambda\in\sigma(U)$ $\Rightarrow$ bien λ es autovalor de U, esto es, $\lambda\in\sigma_p(U)$, bien $\lambda\in\sigma_c(U)$ (siempre es autovalor generalizado de U).
  - $\overline{M_\lambda}=M_\lambda$ reduce a U, $\forall\lambda\in\sigma_p(U)$; $\forall\lambda,\lambda'\in\sigma_p(U),\ \lambda\neq\lambda'$ $\Rightarrow$ $\overline{M_\lambda}\perp\overline{M_{\lambda'}}$.
  - si $\nexists(U-\lambda I)^{-1}$ $\Rightarrow$ $\overline{R(U-\lambda I)}\neq H$ $\Rightarrow$ $\lambda\in\sigma_p(U)$.
  - si $\exists(U-\lambda I)^{-1}$ y $R(U-\lambda I)=H$ $\Rightarrow$ $\lambda\in\rho(U)$.
  - si $\exists(U-\lambda I)^{-1}$, $R(U-\lambda I)\neq H$ y $\overline{R(U-\lambda I)}=H$ $\Rightarrow$ $\lambda\in\sigma_c(U)$.

Proyectores ortogonales

- Dado $P:H\to H$, proyector ortogonal, $P\neq 0,\ P\neq I$ $\Rightarrow$ $\sigma(P)=\sigma_p(P)=\{0,1\}$.

Operadores compactos

- Dado $C \in \mathcal{C}(H) \Rightarrow$
  - $\sigma(A)$ es discreto.
  - $\sigma_p(C)$ es vacío o discreto.
  - si $\sigma_p(C) \neq \varnothing \Rightarrow \sigma_p(C) = \{\lambda_n\}_{n\in N}$, $card\ N \leq \aleph_0$; si $card\ N = \aleph_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
  - el único punto de acumulación de $\sigma_p(C)$ es, en su caso, $\lambda = 0$.
  - si $\dim H$ no es finita $\Rightarrow$ $(\lambda = 0) \in \sigma(C)$ y es autovalor generalizado.
  - o bien $\sigma_c(C) \cup \sigma_r(C) = \varnothing$, o bien $\sigma_c(C) \cup \sigma_r(C) = \{0\}$.
  - para $\lambda \neq 0 \Rightarrow R(C - \lambda I) \lhd H$.
  - para $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ o bien $\lambda \in \rho(C)$, o bien $\lambda \in \sigma_p(C)$.
  - $\lambda \in \rho(C) \Leftrightarrow R(C - \lambda I) = H$.
  - para $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma_p(C) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(C^+)$ y $\dim \overline{M_\lambda}$ es finita.
  - si $\dim H$ es finita $\Rightarrow \sigma(T) = \sigma_p(T)$ y es discreto.

Operadores compactos autoadjuntos

- Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, operador compacto autoadjunto $\Rightarrow$
  - $\sigma_r(A) = \varnothing$.
  - $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$.
  - $\sigma_c(A) = \varnothing$ o $\sigma_c(A) = \{0\}$.
  - si $\sigma_p(A) \neq \varnothing$, es discreto con $card\,\sigma_p(A) \leq \aleph_0$.
  - $\exists \lambda \in \sigma_p(A),\ \lambda \neq 0 \ /\ |\lambda| = \|A\|$ (para $A \neq 0 \Rightarrow \sigma_p(A) \neq \varnothing$).
  - $\forall \lambda \in \sigma_p(A)$: $\overline{M_\lambda} = M_\lambda$ y, si $\lambda \neq 0$, $\dim M_\lambda = n_\lambda$, finita.
  - $\forall \lambda, \lambda' \in \sigma_p(A),\ \lambda \neq \lambda' \Rightarrow M_\lambda \perp M_{\lambda'}$.
  - $\forall \lambda \in \sigma_p(A)$: M_λ reduce a A.
  - $\forall x \in H$: $Ax = \sum\limits_{\substack{\lambda_k \in \sigma_p(A) \\ \lambda_k \neq 0}} \sum\limits_{i=1}^{\dim M_{\lambda_k}} \lambda_k \langle u_{k_i}, x \rangle u_{k_i}$, donde $\{u_{k_i}\}_{i=1}^{\dim M_{\lambda_k}} \subset M_{\lambda_k}$ es el conjunto ortonormal de autovectores de A correspondientes al valor propio λ_k.
  - $\{u_{k_i}\}_{i=1}^{\dim M_{\lambda_k}}$, $\lambda_k \in \sigma_p(A)$, $\lambda_k \neq 0$, es b.o.n. para $R(A) = A(H)$.

- Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, operador compacto autoadjunto no-singular ($0 \notin \sigma_p(A)$) $\Rightarrow$ el conjunto ortonormalizado de vectores propios de A es b.o. de H.

- Dados dos operadores A y B de $\mathcal{A}(H)$, ambos compactos y autoadjuntos, entonces $[A, B] = 0 \Leftrightarrow$ existe una b.o. del espacio H integrada por autovectores simultáneos de A y de B.

Representaciones espectrales

→ Caracterización de un operador en términos de su espectro σ y una familia asociada de proyectores.

Operadores compactos autoadjuntos

Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, operador compacto autoadjunto, sea $M = \bigoplus_k M_{\lambda_k}$, donde $\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $cardN \le \aleph_0$, $\lambda_k \ne 0\ \forall k \in N$, es el conjunto de autovalores no nulos de A, $\sigma_p(A) \supseteq \{\lambda_k\}_{k\in N}$, y sea $H = M^\perp \oplus M$, de forma que $\forall x \in H$: $\exists! x = x_\perp + x_1 + \cdots + x_k + \ldots,\ x_\perp \in M^\perp,\ x_k \in M_{\lambda_k}\ \forall k$; sean $P_\perp, P_k$ los correspondientes proyectores ortogonales sobre $M^\perp, M_{\lambda_k}$, de forma que $\forall x \in H$: $P_\perp x = x_\perp,\ P_k x = x_k$ (si $\sigma_p(A) = \{\lambda_k\}_{k\in N} \Rightarrow M^\perp = \{0\}$).

Se define la ***descomposición*** o ***representación espectral*** de A como $A = \sum_{k\in N} \lambda_k P_k$ (si $cardN = \aleph_0$, entonces $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k - A \right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$).

Si $(\lambda = 0) \notin \sigma_p(A) \Rightarrow \{u_{k_i}\}_{\substack{i=1\\k\in N}}^{i=\dim M_{\lambda_k}}$, $\lambda_k \in \sigma_p(A),\ \lambda_k \ne 0,$ es b.o.n. de H , siendo $\{u_{k_i}\}_{i=1}^{\dim M_{\lambda_k}} \subset M_{\lambda_k}$ el conjunto ortonormal de autovectores de A correspondientes al valor propio λ_k (entonces, obtener la descomposición espectral de A es equivalente a *diagonalizar* A, o sea, A es un *operador diagonal* en la b.o.n. de H integrada por los vectores propios ortonormalizados de A).

Operadores compactos normales

Dado $A \in \mathcal{A}(H)$, operador compacto normal, $A \ne 0$; siendo $\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $cardN \le \aleph_0$, $\lambda_k \ne 0\ \forall k \in N$, el conjunto de autovalores no nulos de A, $\sigma_p(A) \supseteq \{\lambda_k\}_{k\in N}$, ordenados según $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_k| \ge \cdots,\ \lambda_i \ne \lambda_j$ si $i \ne j$; y dado $\{P_k\}_{k\in N}$, conjunto de los correspondientes proyectores ortogonales sobre $M_{\lambda_k} = \{u \in H : Au = \lambda_k u\} \lhd H$, entonces $\Rightarrow$

- $\dim M_{\lambda_k}$ es finita $\forall k$, o sea, P_{λ_k} posee rango finito $\forall k$.
- $\lambda_i \ne \lambda_j \Rightarrow M_{\lambda_i} \perp M_{\lambda_j}$
- si $N < \infty \Rightarrow A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k$ y se dice que A es *degenerado*.
- si $N = +\infty \Rightarrow A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$, *i.e.*, $\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \right\| = |\lambda_{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- $(AH)^\perp = \{x \in H : Ax = 0\}$, *i.e.*, $(R(A))^\perp = kerA$.

- AH admite b.o.n. integrada por vectores propios de A correspondientes a los valores propios no nulos de A, $\left\{u_{k_i}\right\}_{\substack{i=1\\k\in N}}^{i=\dim M_{\lambda_k}}$, $\lambda_k \in \sigma_p(A),\ \lambda_k \neq 0$.

- $\forall x \in H\ :\ Ax = \sum\limits_{\substack{\lambda_k \in \sigma_p(A)\\ \lambda_k \neq 0}} \sum\limits_{i=1}^{\dim M_{\lambda_k}} \lambda_k \left\langle u_{k_i}, x\right\rangle u_{k_i}$.

- H admite *b.o.n. generalizada*, integrada por vectores propios y (en su caso) vectores propios generalizados de A, correspondientes, respectivamente, a los valores propios y (en su caso) valores propios generalizados de A.

Generalización

■ Dado $T : D(T) < H \to H$, operador lineal con $\overline{D(T)} = H$, en general su espectro no será discreto, de forma que la suma $\sum$ que aparece en las anteriores expresiones para la representación espectral pasará a ser una integración, $\int$. *En cierto sentido*, la descomposición espectral del operador representará una integración respecto a una familia de proyectores $\{E(\lambda)\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T = \int \lambda\, dE(\lambda)$ ($\to$ *cf.* Roman, vol. II, pp. 625ss.).

Resolución espectral de la identidad

■ Se denomina ***resolución espectral de la identidad*** I a la familia de proyectores $\{E(\lambda)\}$, $E(\lambda) : \mathbb{R} \to P(H)$, donde cada proyector $E(\lambda)$ es una aplicación de los reales sobre el conjunto o clase $P(H)$ de los proyectores de H sobre H, que satisface:

- $E(\lambda) \leq E(\mu)$ si $\lambda \leq \mu$
- $E(\lambda + \varepsilon) \xrightarrow{f} E(\lambda)$ si $\varepsilon \to 0^+$
- $E(\lambda) \xrightarrow{f} 0$ si $\lambda \to -\infty$
- $E(\lambda) \xrightarrow{f} I$ si $\lambda \to +\infty$

► La función $\rho_x : H \to \mathbb{R}$, $\rho_x(\lambda) = \left\|E(\lambda)x\right\|^2 = \left\langle E(\lambda)x, E(\lambda)x\right\rangle = \left\langle x, E(\lambda)x\right\rangle$, genera una medida de Lebesgue-Stieltjes finita sobre la recta real.

► Dados H y una resolución espectral de la identidad , $\{E(\lambda)\}$, la familia $\{E(\lambda)\}$ define un único operador lineal autoadjunto T con dominio $D(T) = \left\{ y \in H\ :\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\left\|E(\lambda)y\right\|^2 < \infty \right\}$ y regla de actuación tal que satisface $\left\langle x, Ty\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\left\langle x, E(\lambda)y\right\rangle$.

▶ *Descomposición espectral para un operador autoadjunto arbitrario*: dado un operador $T: D(T) < H \to H$, operador lineal autoadjunto, con $\overline{D(T)} = H$, $\Rightarrow \exists!$ resolución espectral de la identidad, $\{E(\lambda)\}$, o familia espectral $\{E(\lambda)\}$ de T, tal que:

- $\langle x, Ty \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\langle x, E(\lambda) y \rangle \quad \forall y \in D(T), \ \forall x \in H$.
- $Ty = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda) y$ y $\|Ty\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d\|E(\lambda) y\|^2 \quad \forall y \in D(T)$.

■ Nociones de Mecánica Cuántica

⌑ ***Postulado I*** *de la Mecánica Cuántica*: A cada sistema físico que se pretenda describir en el marco de la MC, se le hace corresponder un espacio de Hilbert H complejo ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$) y separable.

⌑ ***Postulado II*** *de la Mecánica Cuántica*: Cada observable de un sistema físico se representa en el formalismo matemático de la Mecánica Cuántica mediante un operador lineal autoadjunto que actúa en el espacio de Hilbert del sistema físico considerado.

▶ **Evolución temporal** en *Mecánica Cuántica*: El *operador de evolución temporal* para un vector estado $|\psi(t)\rangle$, *i.e.*: $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$, es un operador lineal unitario; para un sistema conservativo, $U(t, t_0) = \exp[-i(t - t_0)\mathrm{E}/\hbar]$ es el operador evolución temporal para los *estados estacionarios* o estados propios de H con autovalor E (energía), $\mathrm{H}|\psi(t_0)\rangle = \mathrm{E}|\psi(t_0)\rangle$, donde H es el Hamiltoniano del sistema.

▶ **Principio de indeterminación de Heisenberg:** Dado un sistema físico que se encuentra en un estado caracterizado por el vector normalizado (i.e.: de norma 1) $|\psi\rangle \in H$, y dados dos observables del sistema, representados, respectivamente, por los operadores autoadjuntos A y B, si $|\psi\rangle, A|\psi\rangle$ y $B|\psi\rangle \in D(A) \cap D(B)$, entonces $\Rightarrow \Delta_\psi A \cdot \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|$, donde

$$\Delta_\psi A = \left[\langle \psi | (A - \langle A \rangle_\psi)^2 | \psi \rangle\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\langle \psi | A^2 | \psi \rangle - (\langle \psi | A | \psi \rangle)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \|(A - \langle A \rangle_\psi)|\psi\rangle\|$$

es la *indeterminación* de A en ψ, o dispersión cuadrática media de las medidas obtenidas para A sobre ψ; $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle$ es el *valor medio* o *esperado* del observable A en el estado normalizado $|\psi(t)\rangle$ (que NO es el valor más probable, en general; ni siquiera tiene que ser uno de los resultados).

■ "La relación de indeterminación expresa la alteración que en la potencialidad de los valores de la magnitud A en el estado $|\psi\rangle \in H$ produce la actualización de los valores de B a través de su medida"

⌑ ***Postulado III** de la Mecánica Cuántica*: Si un sistema físico se encuentra en un estado puro descrito por un vector normalizado $|\psi\rangle$, entonces la probabilidad de que al medir un observable T resulte un valor λ perteneciente a un boreliano $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ viene dada por

$$P_{T,\psi}(\Delta) = \|E_T(\Delta)\psi\|^2$$

$$= \sum_{\lambda_n \in \sigma_p(T)\cap\Delta} \sum_{i=1}^{\dim M_{\lambda_n}} \left|\langle \lambda_{n_i} | \psi \rangle\right|^2 + \int_{\sigma_n \in \sigma_c(T)\cap\Delta} \sum_{i=1}^{\dim M_{\lambda_n}} \left|\langle \lambda_{n_i} | \psi \rangle\right|^2 d\lambda \,,$$

teniéndose $0 \le P_{T,\psi}(\Delta) \le 1$ y $P_{T,\psi}(\Delta) = 0$ si $\Delta \cap \sigma(T) = \varnothing$.

- si $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, entonces la probabilidad de que al medir el observable T se encuentre como resultado de la medida el valor propio λ_n viene dada por

$$P_{T,\psi}(\lambda_n) \equiv P_{T,\psi}(\{\lambda_n\}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\{\lambda : |\lambda - \lambda_n| < \varepsilon\}) = \sum_{i=1}^{\dim M_{\lambda_n}} \left|\langle \lambda_{n_i} | \psi \rangle\right|^2 .$$

- si λ_n es interior a $\sigma_c(T)$, entonces la probabilidad de que al medir el observable T se encuentre como resultado de la medida un valor que pertenezca al intervalo $(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}) \subset \sigma_c(T)$ vendrá dada en términos de una densidad de probabilidad,

$$\mathsf{P}_{T,\psi}(\lambda) \equiv \lim_{\Delta\lambda \to 0} P_{T,\psi}(\left\{\lambda' : |\lambda' - \lambda| < \frac{\Delta\lambda}{2}\right\}) = \sum_{i=1}^{\dim M_{\lambda}} \left|\langle \lambda_i | \psi \rangle\right|^2$$

-estas probabilidades son independientes de la b.o.n. elegida en cada subespacio propio.

BIBLIOGRAFÍA

- **A. Galindo y P. Pascual, Mecánica Cuántica, vol. 1, cap. 2, Eudema, Madrid, 1989.**
- **P. Roman, *Some modern mathematics for physicists and other outsiders*, vol. 2, Appendix II, Pergamon, 1975.**

Addenda: el operador momento

Definiciones previas

Dada una función $g:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, se define como *absolutamente continua* en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]\subset\mathbb{R}$ cuando existe una función $h\in L^1([a,b])$ tal que $g(x)=g(a)+\int_a^x h(y)dy\ \ \forall x\in[a,b]$ (*i.e.*: g es una *primitiva* de h).

- $g,\ g'=\dfrac{dg}{dx}$ continuas $\Rightarrow$ g absolutamente continua
- g absolutamente continua $\Rightarrow$ g continua y diferenciable
- g absolutamente continua $\cancel{\Rightarrow}$ g' continua y $\cancel{\Rightarrow}$ $g'\in L^2([a,b])$
- Dada $g:[a,b]\to\mathbb{C}$, absolutamente continua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ g es continua y diferenciable c.d. sobre $[a,b]$, teniéndose $g'=\dfrac{dg}{dx}\triangleq h(x)$, donde $h(x)$ es una función para la que g es una primitiva.

Una función $g:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, se define como *absolutamente continua* en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $-\infty\le a<b\le+\infty$ $\Leftrightarrow$ es absolutamente continua en cualquier subintervalo finito del intervalo $[a,b]$.

El operador momento

Definimos inicialmente el operador momento como el operador $p:D(p)\lhd L^2([a,b])\to L^2([a,b])$, a y b finitos, $[a,b]\subset\mathbb{R}$; con dominio

$$D(p)=\left\{g\in L^2([a,b]): g \text{ es absolutamente continua en } [a,b] \text{ y } g'=\frac{dg}{dx}\in L^2([a,b])\right\}$$

y regla de actuación

$$(pg)(x)=-i\frac{dg(x)}{dx}=-ig'(x)\ \ \forall g\in D(p)$$ (unidades $\hbar=1$).

- $\overline{D(p)}=(L^2([a,b])$
- $p\notin\mathcal{A}(D(p))$

- Dada la restricción de p, que denominamos operador p_{r1}, con dominio

$$D(p_{r1})=\left\{g\in L^2([a,b]): g \text{ es absolut. cont. en } [a,b],\ g'=\frac{dg}{dx}\in L^2([a,b]) \text{ y } g(a)=g(b)=0\right\}$$

que sigue siendo denso en H, el adjunto es $p_{r1}^+ \supsetneq p_{r1}$, pues

$$D(p_{r1}^+)=\{g\in L^2([a,b]): g \text{ es absolut. cont. en } [a,b],\ g'=\frac{dg}{dx}\in L^2([a,b]) \text{ y } \exists! h\in L^2([a,b])$$

$$\text{para el que } \langle f, p_{r1}g\rangle=\langle h,g\rangle \forall g\in D(p_{r1})\}\supsetneq D(p_{r1}),$$

ya que contiene funciones que no se anulan en los extremos del intervalo y la regla de actuación permanece, $p_{r1}^+ f=h=-i\dfrac{df}{dx}$.

- La restricción p_{r1} es hermítica y no es ni esencialmente autoadjunta (sí posee un número infinito no numerable de extensiones autoadjuntas) ni autoadjunta.

- Dada la restricción de p, operador p_{r2} con dominio

$$D(p_{r2})=\{g\in L^2([a,b]): g \text{ es absolut. cont. en } [a,b],\ g'=\frac{dg}{dx}\in L^2([a,b])$$

$$\text{y } g(b)=e^{i\theta}g(a)\neq 0,\ \theta\in\mathbb{R},\ \theta\equiv cte\},$$

que sigue siendo denso en H, el adjunto es $p_{r2}^+=p_{r2}$, pues $D(p_{r2}^+)=D(p_{r2})$ y la regla de actuación permanece.

- La restricción p_{r2} es autoadjunta.

- Las restricciones p_{r1} y p_{r2} son cerradas ($p_{r1}^{++}=p_{r1}$ y $p_{r2}^{++}=p_{r2}$).

H	L^2[a,b]		L^2[R]	
p	p_i **no acot., cerra.**		p_i **no acotado, cerrado**	
D(p)	$D_1(p_1)$	$D_2(p_2)$	$D'_1(p_1)$	$D'_2(p_2)$
p^+	$p_1^+\supsetneq p_1$	$p_2^+=p_2$	$p_1^+=p_1$	$p_2^+\supsetneq p_2$
$D(p^+)$	$D(p_1^+)\supsetneq D_1(p_1)$	$D(p_2^+)=D_2(p_2)$	$D'(p_1^+)=D'_1(p_1)$	$D'(p_2^+)\supsetneq D'_2(p_2)$

$$D_1'(p_1)=\{f\in H \mid f \text{ absolutamente continua en } \mathbb{R} \text{ y } f'\in H\}$$

$$D_2'(p_2)=\{f\in H \mid f \text{ absolutamente continua en } \mathbb{R},\ f'\in H \text{ y } f' \text{ continua en } \mathbb{R}\}$$

($i=1\to r1$ e $i=2\to r2$)